Clément Sayrin
clement.sayrin@lkb.ens.fr

TD d'Optique 3

Diffraction (1)

25/09/2020

Exercice I Diffraction de Fraunhofer

On considère une source lumineuse monochromatique ponctuelle S éclairant un objet, dans le plan Oxy, situé à une distance d de la source et de transmittance complexe $t(x, y) = |t(x, y)|e^{i\varphi(x,y)}$. On note s_0 l'onde source et s l'onde transmise à travers l'objet. On observe l'éclairement obtenu dans un plan $(O'XY)$ situé à une distance D de l'objet.

1. Énoncer le principe de Huygens-Fresnel.
2. Calculer l'amplitude diffractée dans la limite où les distances objet–écran et source–objet sont grandes devant toutes les autres dimensions.
3. Qu'est-ce que la diffraction de Fraunhofer ? Quelles sont ses conditions de validité ? Qu'est-ce que la diffraction de Fresnel ?
4. Décrire quantitativement la figure de diffraction de Fraunhofer d'une fente rectangulaire de longueur a et de largeur b éclairée par une onde plane monochromatique de vecteur d'onde $\vec{k}_0$, observée dans le plan focal d'une lentille de focale f.
5. À l'aide de la question précédente, estimer la largeur de la tache d'Airy dans le cas où l'objet diffractant est un trou.
6. Énoncer et démontrer le théorème de Babinet.

Exercice II Diffraction par un ensemble de structures

On considère un ensemble de petites structures diffractantes, ou motifs, réparties dans un objet de petite dimension devant la distance D à l'écran sur lequel on observe la figure de diffraction.

On éclaire cet objet par une onde plane monochromatique, de longueur d'onde λ_0, de direction quelconque, et on étudie la figure de diffraction obtenue sur l'écran, dans l'approximation de Fraunhofer.

1. **Cas général**

   1.1 Utiliser le principe de Huygens-Fresnel pour obtenir l'amplitude diffractée en un point $M(X, Y, D)$ de l'écran d'observation.

   1.2 Montrer que l'on obtient la figure de diffraction d'un motif, modulée par une fonction caractéristique de la répartition de ces motifs dans l'objet.

2. **Structures réparties de façon aléatoire**

   Que nous donne cette formule dans le cas de motifs répartis de façon aléatoire ?

3. **Structures périodiques : réseau**

   On considère maintenant une répartition périodique des structures diffractantes : un réseau de N fentes de largeur e, réparties sur une longueur $L = Na$ où a est la période de ce réseau.

   La fonction de transparence de chaque fente est $t_0(x)$, avec $t_0(x) = 1$ pour $-e/2 < x < e/2$ et $t_0(x) = 0$ sinon. On étudie la figure de diffraction obtenue en transmission.

   3.1 Déterminer les directions privilégiées dans lesquelles se concentre l'intensité lumineuse.

   3.2 Calculer l'intensité diffractée par l'ensemble du réseau dans une direction donnée en fonction de l'intensité I_0, intensité mesurée au centre de la figure pour une fente unique.

Clément Sayrin
clement.sayrin@lkb.ens.fr

Exercice III Diffraction et lentilles

Placer l'écran d'observation au foyer d'une lentille revient en pratique à observer « à l'infini ». Dans le cas de la diffraction d'une onde plane, on réalise alors les conditions d'obtention de la diffraction de Fraunhofer. Toutefois, la lentille elle-même peut être traitée comme faisant partie intégrante de l'objet diffractant. On se propose ici de retrouver de cette façon dans quelles conditions on retrouve la diffraction de Fraunhofer.

On considère à nouveau la situation de l'exercice I. On accole à l'objet diffractant de transmission t une lentille mince que l'on suppose de dimensions infinies (on omet le fait qu'elle diaphragme le faisceau incident).

1. **Lentille de Fresnel**

1.1 Justifier que la fonction de transmission $t_f(x,y)$ d'une lentille mince convergente de focale $f>0$ s'écrit $t_f(x,y) = \exp(-ikr^2/2f)$, où $r^2 = x^2+y^2$ et $k = 2\pi/\lambda$.

1.2 En reprenant les calculs de l'exercice I, quelle relation doivent vérifier d, D, et f pour obtenir la figure de diffraction de Fraunhofer de l'objet de transmission t sur l'écran ? Commenter.

2. **Doublet de lentilles**

On accole maintenant deux lentilles de focales f_1 et f_2 que l'on éclaire par une onde plane. On place l'écran d'observation à f_1 du doublet. Comme toujours, on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe proche de l'axe optique.

2.1 En utilisant le fait qu'une onde sphérique de rayon de courbure R prend la forme $\exp[ikr^2/(2R)]$, proche de l'axe optique, trouver simplement l'expression de l'amplitude complexe de l'onde sur l'écran.

2.2 Utiliser le résultat de la partie 1 pour retrouver ce résultat. On utilisera l'intégrale

$$\int \mathrm{e}^{-i\frac{x^2}{2a}}\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi a}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{ak^2}{2}}.$$

3. **Position de l'objet diffractant**

Pour observer la diffraction d'un objet à l'infini, on utilise couramment une lentille dans le plan focal image de laquelle on place l'écran d'observation (voir figure 3.1). On ne soucie général pas de la distance δ qui sépare l'objet diffractant et la lentille. On cherche ici à justifier cet oubli en considérant la dépendance en δ de l'amplitude complexe dans le plan d'observation.

On considère un objet de fonction de transmission $t(x)$ placé à une distance δ d'une lentille de focale f. L'objet est éclairé par une onde plane sur l'axe, et on place l'écran d'observation dans le plan focal image de la lentille. Pour simplifier, on considère un objet 1D. L'extension à 2D est immédiate mais alourdit les calculs.

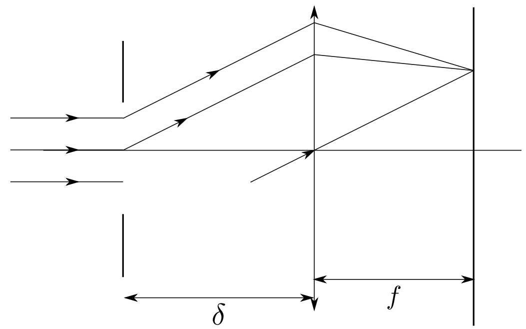

Figure 3.1 – Diffraction d'une onde plane à l'infini en utilisant une lentille. L'écran est dans le plan focal de la lentille.

3.1 Montrer que l'amplitude de l'onde dans le plan de la lentille s'écrit comme la convolution de $t(x)$ et de $g(x) = \exp\left(\frac{ikx^2}{2\delta}\right)$. On supposera δ grand devant l'étendue de l'onde sur la lentille et sur l'objet diffractant.

3.2 Comment l'amplitude de l'onde dans le plan d'observation dépend-elle de δ ? Montrer alors que déplacer l'objet diffractant par rapport à la lentille, c'est-à-dire modifier δ, ne modifie pas la figure de diffraction.