

Corrigé

## Interférences – Notion de cohérence



### EXERCICE I NOTION DE COHÉRENCE TEMPORELLE

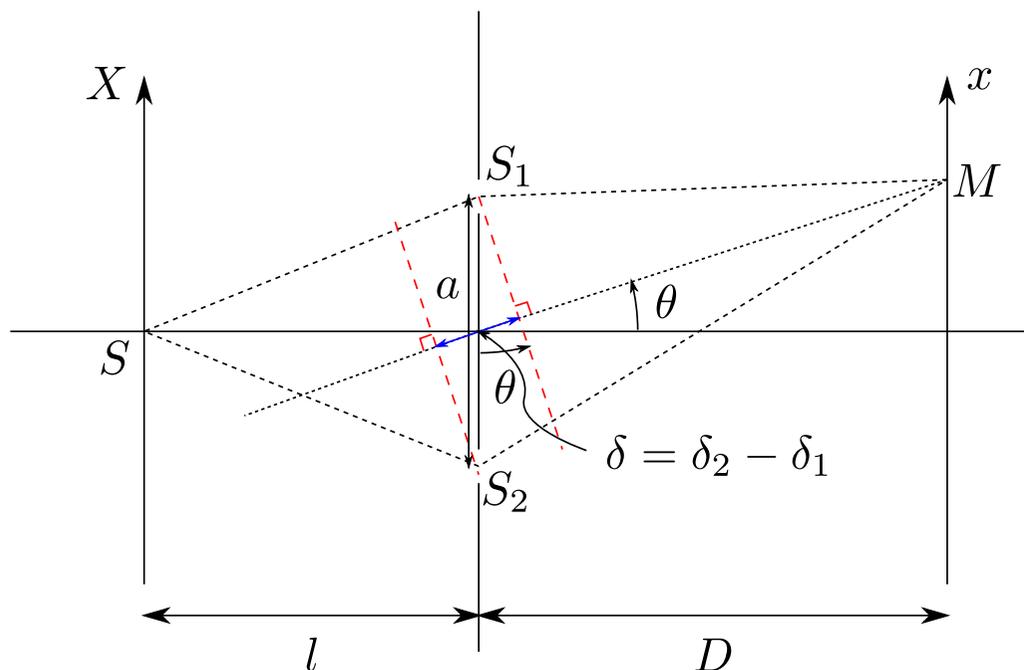


FIGURE 1.1 – Dispositif des trous d'Young. La différence de marches, à l'infini, est lue comme l'écart entre les plans de phase (pointillés rouges) contenant  $S_2$  et  $S_1$ .

1. Les deux fentes  $S_1$  et  $S_2$  sont des sources secondaires, issues de la source  $S$ , et ont donc une relation de phase parfaitement déterminée. De plus,  $S_1$  et  $S_2$  sont à égale distance de  $S$ , donc le déphasage entre  $S_1$  et  $S_2$  est nul. On note  $s_i$  la vibration issue de la source  $S_i$ .

### Rappel Approximations usuelles

- Approximation scalaire : on néglige le caractère vectoriel de l'onde lumineuse (cf. TP polarisation),
- Interférences à grande distance :  $l, D \gg a, \lambda, x, X$ .

Les deux fentes sont identiques, donc  $s_1(S_1) = s_0 = s_2(S_2)$ , avec  $s_i(M) = s_0 e^{ik\delta_i(M)}$ . On a introduit  $\delta_i(m) = S_i M$ . En  $M$ , les deux ondes se superposent selon

$$s(M) = s_1(M) + s_2(M) = s_0 (e^{ik\delta_1} + e^{ik\delta_2}) = s_0 e^{ik_0\delta_1} (1 + e^{ik_0(\delta_2 - \delta_1)}).$$

**Première méthode**  $\delta_1 = S_1 M$ ,  $\delta_2 = S_2 M$  et  $k = 2\pi/\lambda$ . On a

$$S_1 M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + y^2},$$

$$S_2 M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + y^2}.$$

Ensuite, en faisant un développement limité au second ordre en  $x/D$ ,  $y/D$  et  $a/D$ , on obtient

$$\delta \equiv S_1 M - S_2 M = -\frac{a}{D} x.$$

L'intensité est donnée par  $I = |s|^2$ . En notant  $I_0 = 2|s_0|^2$ , l'intensité sur l'écran en l'absence d'interférence s'écrit

$$I = I_0 \left[ 1 + \cos\left(2\pi \frac{ax}{\lambda D}\right) \right] = I_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right]. \quad (\text{I.1})$$

La figure d'interférence présente un interfrange  $i = \lambda D/a$ .

**Deuxième méthode** Avec  $O$  le point de l'axe optique situé entre  $S_1$  et  $S_2$ , on a

$$\delta_i^2 = \overline{S_i M}^2 = \left( \overline{S_i O} + \overline{OM} \right)^2 = \frac{a^2}{4} + OM^2 + 2\overline{S_i O} \cdot \overline{OM}.$$

Puisque  $OM \sim D \gg a$ ,

$$\delta_i \sim D \left( 1 + \frac{\overline{S_i O} \cdot \overline{OM} + a^2/8 + x^2/2}{D^2} \right) \quad \text{et} \quad \delta_2 - \delta_1 = \frac{\overline{S_2 S_1} \cdot \overline{OM}}{D}.$$

La différence de marche entre les deux rayons parvenant au point M correspond donc au segment  $\delta(S_1S_2)$  sur la figure 1.1. On pourrait retrouver ce résultat par un raisonnement qualitatif. Puisqu'on place l'écran à grande distance, les ondes émises par les sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  sont, au niveau de l'écran, des ondes planes. Les surfaces de phase à considérer étant alors des plans, le chemin entre le point  $S_1$  et le point M est égal à celui qui relie le point M au projeté de  $S_1$  sur  $S_2M$ . La différence de chemin optique entre les deux chemins correspond bien seulement au segment  $\delta(S_1S_2)$ , soit

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = a \sin \theta \sim a \tan \theta = \frac{ax}{D}.$$

Pour avoir des interférences constructives, il faut avoir

$$\boxed{\delta = p\lambda, p \in \mathbb{Z}} \rightarrow x = \underbrace{\frac{\lambda D}{a}}_{=i} p.$$

**Remarque** Dans le cas de deux trous sources, le lieu des interférences constructives est donné par l'équation

$$S_1M - S_2M = p\lambda, p \in \mathbb{Z}.$$

C'est l'équation d'*hyperboloïdes de révolution* de foyers  $S_1$  et  $S_2$ , tels que représentés figure 1.2.

**Remarque** On a ici fait comme si les deux fentes sources étaient en fait ponctuelles. Il faut, en toute rigueur, aussi considérer les interférences avec toutes les autres sources secondaires alignées le long des fentes secondaires. Cela revient en fait à calculer la figure de diffraction par les fentes qui vient moduler la figure d'interférences. On laisse ce calcul pour le TD suivant.

- Si l'on a deux composantes spectrales de fréquences  $\nu_1 = c/\lambda_1$  et  $\nu_2 = c/\lambda_2 \neq \nu_1$ , les ondes correspondant à ces deux composantes n'interfèrent pas entre elles. On dit qu'elles sont **incohérentes entre elles**. Dans ce cas, on additionne les figures d'interférence obtenues pour chaque longueur d'onde, et non pas les amplitudes.

En effet, si on note  $s$  la superposition en un point  $\vec{x}$  de deux vibrations de pulsation  $\omega_1$  et  $\omega_2$ ,

$$s = s_0 \exp(-i\omega_1 t + i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}) + s'_0 \exp(-i\omega_2 t + i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}),$$

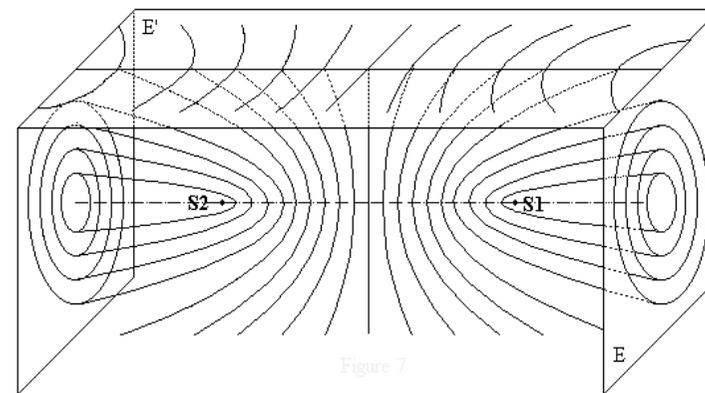


FIGURE 1.2 – Hyperboloïdes de révolution, lieux des interférences constructives de deux points sources. Observés sur l'écran E', ils correspondent aux franges d'Young. Source : [www.sciences.univ-nantes.fr/sites/jacques\\_charrier/tp/michelson/hyperbo.html](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/jacques_charrier/tp/michelson/hyperbo.html)

alors

$$I(\vec{x}) \propto |s|^2 = |s_0|^2 + |s'_0|^2 + 2\text{Re} \left( s_0 s'_0{}^* \exp \left[ -i(\omega_1 - \omega_2)t + i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x} \right] \right).$$

On suppose, pour simplifier, mais sans perte de généralité que  $s_0, s'_0 \in \mathbb{R}^2$ . On peut alors écrire

$$|s|^2 = |s_0|^2 + |s'_0|^2 + 2s_0 s'_0 \underbrace{\cos \left[ (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x} - (\omega_1 - \omega_2)t \right]}_{\text{Si } \omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow \text{battements de période } 2\pi/(\omega_1 - \omega_2)}.$$

Le terme oscillant est nul en valeur moyenne quand  $T_{\text{battements}}$ , période temporelle des battements, et  $T_{\text{détecteur}}$ , temps de réponse du détecteur, vérifient

$$\boxed{T_{\text{battements}} \ll T_{\text{détecteur}}}.$$

Pour deux sources optiques distinctes, on a typiquement  $T_{\text{battement}} \approx 10^{-15}$  s, *i.e.* un temps beaucoup plus court que les temps de réponse des détecteurs les plus rapides ( $\approx 10^{-10}$  s). L'éclairement observé est donc simplement la somme des deux éclairements  $|s_0|^2$  et  $|s'_0|^2$ . **Les deux vibrations lumineuses, de fréquences différentes, n'interfèrent pas entre elles.**

En revenant au cas des bifentes, avec deux fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , l'intensité de la figure d'interférences s'écrit

$$I = \frac{I_0}{2} \left( 2 + \underbrace{\cos\left(2\pi\frac{ax}{cD}\nu_1\right) + \cos\left(2\pi\frac{ax}{cD}\nu_2\right)}_{2\cos\left(2\pi\frac{ax}{cD}\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)\cos\left(2\pi\frac{ax}{cD}\frac{\nu_2-\nu_1}{2}\right)} \right).$$

On a ici supposé que la même intensité  $I_0/2$  est contenue dans chaque composante spectrale. On pose  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$  et  $\bar{\nu} = \frac{\nu_1+\nu_2}{2}$ , alors

$$I = I_0 \left( \underbrace{1 + \cos\left(\pi\frac{ax}{cD}\Delta\nu\right)}_{\text{contraste } C} \underbrace{\cos\left(2\pi\frac{ax}{cD}\bar{\nu}\right)}_{\text{interférences à } \bar{\nu}} \right).$$

On retrouve la figure d'interférence pour une onde de fréquence  $\bar{\nu}$ , dont le contraste est modulé périodiquement par la fonction contraste

$$C(x) = \cos\left(\pi\frac{ax}{cD}\Delta\nu\right) = \cos(\pi\Delta\nu\tau),$$

où l'on a introduit le temps  $\tau = \frac{x}{c}$ , la différence de temps de parcours des chemins  $S_1M$  et  $S_2M$  par la lumière.

**Remarque** Le contraste est de façon usuelle définie par  $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ . C'est cette même définition que l'on utilise ici, la valeur  $C(x)$  étant la valeur *locale* du contraste, correspondant aux oscillations d'intensité autour du point  $x$ . Il n'est en fait bien défini que si  $C(x)$  oscille lentement par rapport aux oscillations rapides, ici de période  $cD/a\bar{\nu}$ .

3.3.1 On décompose la source en composantes spectrales élémentaires. L'intensité émise dans un intervalle de fréquence  $\delta\nu$  autour de  $\nu$  est donné par  $I(\nu)\delta\nu$ . Les composantes spectrales élémentaires étant incohérentes entre elles, pour obtenir la figure d'interférence  $I$ , on somme les éclaircissements élémentaires, *i.e.* les figures

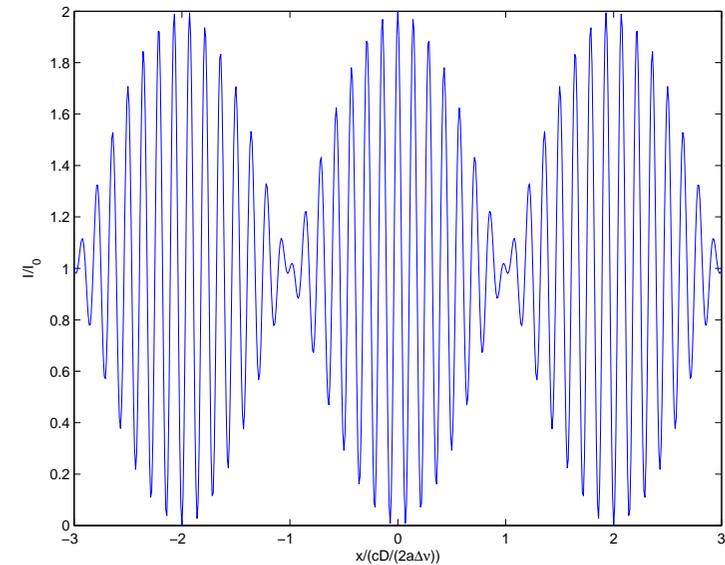


FIGURE 1.3 – Figure d'interférence observée pour deux composantes spectrales.

d'interférence  $dI(\nu)$  correspondant à chaque intervalle de fréquence  $\nu \pm \delta\nu$  :

$$dI(\nu) = I(\nu) \left[ 1 + \cos\left(2\pi\frac{ax}{cD}\nu\right) \right] d\nu,$$

$$\text{soit } I = \underbrace{\int I(\nu) d\nu}_{=I_0} + \underbrace{\int I(\nu) \cos\left(2\pi\frac{ax}{cD}\nu\right) d\nu}_{\text{Re}\left(\int I(\nu) e^{2i\pi\frac{ax}{cD}\nu} d\nu\right)}.$$

On suppose ici que  $I(\nu)$  ne prend des valeurs notables que pour  $\nu \sim \nu_0$  à la largeur de raie près, supposée petite devant  $\nu_0$ , donc

$$\int_0^{+\infty} I(\nu) e^{2i\pi\frac{ax}{cD}\nu} d\nu \approx \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu) e^{2i\pi\frac{ax}{cD}\nu} d\nu,$$

$$= e^{2i\pi\frac{ax}{cD}\nu_0} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu + \nu_0) e^{2i\pi\frac{ax}{cD}\nu} d\nu \right).$$

On introduit finalement  $\mathcal{J}(\nu) = I(\nu + \nu_0)/I_0$  la densité spectrale normalisée centrée en  $\nu_0 = 0$ , qui ne contient donc plus d'information sur la fréquence centrale

$v_0$ , mais qui conserve l'information sur *le profil de raie*. On obtient alors

$$I = I_0 \left[ 1 + \operatorname{Re} \left( \underbrace{e^{2i\pi \frac{ax}{cD} v_0}}_{\text{interférences à } v_0} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(v) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} v} dv \right)}_{\text{contraste } C} \right) \right]. \quad (\text{I.2})$$

Pour simplifier, on suppose que la raie est symétrique autour de  $v_0$ , *i.e.* que le profil de raie  $\mathcal{J}(v)$  est symétrique / est une fonction paire. Dans ce cas, l'intégrale dans l'équation précédente est réelle, et l'on obtient finalement

$$I = I_0 \left[ 1 + C(x) \cos \left( 2\pi \frac{ax}{cD} v_0 \right) \right],$$

où le contraste  $C$  s'écrit

$$C(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(v) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} v} dv.$$

On peut récrire le contraste  $C(x)$  de façon plus générale sous la forme d'une fonction, non plus de l'abscisse  $x$ , mais plutôt du temps caractéristique  $\tau = \delta/c$ , différence de « temps de parcours » entre les deux chemins  $S_1M$  et  $S_2M$  :

$$C(\tau = \delta/c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(v) e^{2i\pi v \tau} dv. \quad (\text{I.3})$$

La fonction de contraste s'écrit alors simplement comme la **transformée de Fourier du profil de raie**.

3.2 *Cas d'une fonction porte* Le profil de raie s'écrit dans ce cas

$$I(v) = I_0 \frac{1}{\Gamma} \Pi(v; v_0, \Gamma),$$

où  $\Pi(v; v_0; \Gamma)$  est non nulle, égale à 1, sur l'intervalle  $[v_0 - \Gamma/2, v_0 + \Gamma/2]$  seulement.

On a alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} I(v) dv + \int_0^{+\infty} I(v) \cos \left( 2\pi \frac{ax}{cD} v \right) dv, \\ &= I_0 + \frac{I_0}{\Gamma} \int_{v_0 - \frac{\Gamma}{2}}^{v_0 + \frac{\Gamma}{2}} \cos \left( 2\pi \frac{ax}{cD} v \right) dv, \\ &= I_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\Gamma} \frac{cD}{2\pi ax} \underbrace{\left[ \sin \left( 2\pi \frac{ax}{cD} \left( v_0 + \frac{\Gamma}{2} \right) \right) - \sin \left( 2\pi \frac{ax}{cD} \left( v_0 - \frac{\Gamma}{2} \right) \right) \right]}_{2 \sin \left( \pi \frac{ax}{cD} \Gamma \right) \cos \left( 2\pi \frac{ax}{cD} v_0 \right)} \right\}. \end{aligned}$$

Soit

$$I = I_0 \left[ 1 + \operatorname{sinc} \left( \pi \frac{ax}{cD} \Gamma \right) \cos \left( 2\pi \frac{ax}{cD} v_0 \right) \right].$$

On retrouve bien le fait que le contraste  $C(x)$  est la transformé du profil de raie :

$$C(x) = \operatorname{sinc} \left( \pi \frac{ax}{cD} \Gamma \right) = \int_{-\frac{\Gamma}{2}}^{\frac{\Gamma}{2}} \frac{1}{\Gamma} e^{2i\pi \frac{ax}{cD} v} dv.$$

3.3 *Cas d'une lorentzienne* On a cette fois

$$\mathcal{J}(v) = \frac{2\pi}{\Gamma} \frac{1}{1 + 4 \left( \frac{v}{\Gamma} \right)^2},$$

et donc

$$C(x) = \frac{2\pi}{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4 \left( \frac{v}{\Gamma} \right)^2} e^{2i\pi \frac{ax}{cD} v} dv$$

soit, d'après le formulaire,

$$C(x) = e^{-\pi \Gamma \frac{ax}{cD}}.$$

Le contraste est maintenant exponentiellement décroissant, comme il se doit : la transformée de Fourier d'une lorentzienne est une exponentielle décroissante.

**Notion de cohérence temporelle, longueur de cohérence** On a vu que l'on pouvait toujours exprimer le contraste des interférences s'exprime simplement en fonction de la différence de marche  $\delta = ax/D$  entre les deux rayons issus des deux trous d'Young ou du « temps de parcours » associé  $\tau = \delta/c$ . Dans les trois cas précédents, par exemple, on peut écrire indifféremment

$$\begin{aligned} C_{\text{deux raies}}(x) &= \cos\left(\pi\frac{\delta}{c/\Gamma}\right) = \cos(\pi\Gamma\tau) \\ C_{\text{porte}}(x) &= \text{sinc}\left(\pi\frac{\delta}{c/\Gamma}\right) = \text{sinc}(\pi\Gamma\tau) \\ C_{\text{lorentzienne}}(x) &= \exp\left(-\pi\frac{|\delta|}{c/\Gamma}\right) = \exp(-\pi\Gamma|\tau|). \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Dans l'écriture de droite, on voit naturellement apparaître un temps caractéristique, appelé *temps de cohérence*,

$$\tau_c = \frac{1}{\Gamma}. \quad (\text{I.5})$$

C'est le temps caractéristique sur lequel la source garde ses propriétés de cohérence. Quand la différence de « temps de parcours » entre les deux chemins,  $\tau$ , devient grande devant de temps de cohérence, le contraste des interférences devient faible. C'est ce qui donne son nom à cette propriété de cohérence d'une source lumineuse, *i.e.* la *cohérence temporelle*. À noter que, dans le modèle des trains d'onde (voir exercice suivant),  $\tau_c$  correspond à la durée d'une impulsion lumineuse.

Dans l'écriture de gauche des équations (I.4), on voit également apparaître la grandeur appelée *longueur de cohérence*

$$l_c = \frac{c}{\Gamma}. \quad (\text{I.6})$$

Le contraste des interférences décroît maintenant quand la différence de marche entre les deux ondes émises par les deux trous d'Young devient grande par rapport à cette longueur.

On peut comprendre qualitativement pourquoi il y a brouillage des franges à grande différence de marche (ou à grande différence de « temps de parcours »). En effet, la différence de phase entre les deux rayons, émis par les deux trous d'Young,

dépend de  $\nu$  selon  $\delta\varphi = 2\pi\nu\delta/c$ . Ainsi, si  $\delta$  est faible, une faible variation de  $\nu$  induit une faible variation de  $\delta\varphi$  et la figure d'interférence n'est pour ainsi dire pas affectée par une largeur de raie non nulle. À grande différence de marche, au contraire, une variation faible de  $\nu$  peut induire une forte variation de  $\delta\varphi$  et une frange qui était brillante peut alors devenir sombre. Ce cas extrême se produit pour la première fois quand

$$\delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{c}(\nu + \delta\nu) - \frac{2\pi\delta}{c}\nu = \pi \quad \text{soit} \quad \delta \sim \frac{c}{\delta\nu}.$$

Pour une raie de largeur spectrale  $\delta\nu = \Gamma$ , il y a donc bien brouillage des franges d'interférence quand  $\delta$  devient de l'ordre de  $l_c$ .

La longueur de cohérence de la source est d'autant plus faible que sa largeur de raie grande. En particulier, une source monochromatique ( $\Gamma = 0$ ) a une longueur de cohérence infinie : il n'y a pas de brouillages des interférences. La mesure de cette longueur de cohérence est donc une indication directe sur la largeur du profil de raie. Plus généralement, la mesure de la variation du contraste  $C$  avec  $\delta$  permet de reconstruire le profil de raie. Cette relation de transformée de Fourier entre  $C$  et  $\mathcal{J}$  aura un direct analogue dans l'étude de la cohérence spatiale de la source.

### Ordres de grandeurs

- *Lumière blanche* :  $\Gamma \sim 10^{15} \text{ Hz}$  ( $\delta\lambda \sim 400 \text{ nm}$ ), soit  $l_c \sim 1 \mu\text{m}$  et  $\tau_c \sim 10^{-15} \text{ s}$ ,
- *Lampe spectrale* :  $\Gamma \sim 1 \text{ GHz}$  à  $100 \text{ GHz}$  (lampe basse ou haute pression) soit  $l_c \sim \text{qq mm}$  à  $\text{qq } 100 \text{ mm}$  et  $\tau_c \sim 10^{-9} \text{ s}$  à  $10^{-11} \text{ s}$ ,
- *Laser* : les valeurs sont très variables, d'un type de laser à l'autre, avec une longueur de cohérence variant typiquement de  $l_c \sim 1 \text{ m}$  à plusieurs km. Les lasers les plus stables, actuellement, sont des horloges optiques présentant une stabilité impressionnante de  $\delta\nu/\nu_0 \sim 10^{-18}$ . La longueur de cohérence de ces lasers est de plusieurs  $10^8 \text{ km}$ , soit plusieurs unités astronomiques !

### EXERCICE II MODÈLE DES TRAINS D'ONDE ET COHÉRENCE TEMPORELLE

1. On peut modéliser une source de lumière comme une assemblée d'atomes qui se désexcitent en émettant un train d'onde. Cela correspond au processus de désexcitation d'un niveau d'énergie  $E_1$  vers un niveau  $E_0$ , accompagné de l'émission d'une onde lumineuse de fréquence  $\nu_0$  tel que  $h\nu_0 = E_1 - E_0$ . En pratique, cette émission

se fait avec une certaine largeur spectrale, liée notamment à la durée de vie finie des niveaux d'énergie. On considère donc des trains d'onde  $U_0(t)$  de durée finie  $\tau$ . Soit  $\hat{U}_0(\nu)$  le spectre en fréquences d'un train d'onde.

$$\begin{aligned}\hat{U}_0(\nu) &= \text{TF}(U_0(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t)e^{-2i\pi\nu t} dt, \\ &= \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t} dt, \\ &= \frac{1}{2i\pi(\nu_0 - \nu)} 2i \sin\left(2\pi(\nu_0 - \nu)\frac{\tau}{2}\right).\end{aligned}$$

D'où,

$$\hat{U}_0(\nu) = \tau \text{sinc}[\pi(\nu_0 - \nu)\tau].$$

Ce modèle simple permet donc qualitativement de reproduire une largeur de raie, ici une raie en forme de sinus cardinal. La première annulation du sinus cardinal a lieu en  $\nu_0 \pm \delta\nu/2$ , avec  $\delta\nu = 2/\tau$ , largeur du spectre d'un train d'onde.

2. La source émet une succession de  $N$  trains d'onde  $U_k(t)$ , tous identiques, mais de phases relatives aléatoires, *i.e.* une onde

$$U(t) = \sum_k U_k(t), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_k(t) = e^{i\varphi_k} e^{2i\pi\nu_0 t}, & |t - t_k| < \tau/2, \\ U_k(t) = 0, & |t - t_k| > \tau/2, \end{cases}$$

où  $t_k = k\tau$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  et où  $\varphi_k$  est une phase aléatoire. On choisit le train d'onde  $k = 0$  comme référence de phase, *i.e.* on pose  $\varphi_0 = 0$ . Le spectre de cet ensemble de trains d'onde est alors

$$\begin{aligned}\hat{U}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k U_k(t)e^{-2i\pi\nu t} dt = \sum_k e^{i\varphi_k} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(t - t_k)e^{-2i\pi\nu t} dt, \\ &= \sum_k e^{i\varphi_k} e^{-2i\pi\nu t_k} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(t)e^{-2i\pi\nu t} dt, \\ &= \hat{U}_0(\nu) \sum_k e^{i\varphi_k} e^{-2i\pi\nu t_k}.\end{aligned}$$

On a finalement

$$I(\nu) = |\hat{U}(\nu)|^2 = \underbrace{\left| \sum_k e^{i\varphi_k} e^{-2i\pi\nu t_k} \right|^2}_{=N \text{ car } \varphi_k \text{ est aléatoire}} |\hat{U}_0(\nu)|^2,$$

soit

$$I(\nu) = I_0 \text{sinc}^2[\pi(\nu - \nu_0)\tau].$$

Le spectre de l'assemblée de trains d'onde est le même que celui d'un train d'onde unique.

3. On trouve une raie avec une largeur  $\delta\nu$  telle que

$$\delta\nu \cdot \tau \sim 1.$$

Le temps de cohérence, tel qu'on l'avait introduit à l'exercice précédent, est donc ici  $\tau$ , et l'expression *temps de cohérence* prend tout son sens : c'est la durée sur laquelle l'onde émise garde sa cohérence. Tous les temps  $\tau$ , la phase du train d'onde change de façon aléatoire et l'information de phase, *i.e.* la cohérence, est perdue.

De même, la longueur de cohérence  $l_c = c\tau$  correspond ici simplement à l'extension spatiale d'un train d'ondes. Dans un interféromètre, si la différence de marche  $\delta$  entre deux chemins est inférieure à  $l_c$ , alors on assiste à l'interférence entre deux ondes issues du même train d'onde initial, qui interfèrent donc avec une relation de phase parfaitement déterminée. Si  $\delta > l_c$  en revanche, alors les deux ondes sont issues de deux trains d'onde différents, sans relation de phase bien déterminée. La phase de la figure d'interférence est alors aléatoire, et on a un brouillage.

4. On a  $\delta\nu = 1/\tau$ ,  $\nu = c/\lambda$  donc  $\delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu$ .

- Lumière blanche :  $\delta\lambda \sim 400 \text{ nm}$ ,  $\tau \sim 10^{-15} \text{ s}$  et donc  $l_c \sim 1 \mu\text{m}$ .
- Raie spectrale :  $\delta\lambda \sim 0,03 \text{ nm}$ ,  $\tau \sim 10^{-11} \text{ s}$  et donc  $l_c \sim 10 \text{ mm}$ .
- Laser :  $\delta\lambda$  est très variable suivant le laser, on retiendra que  $l_c$  est supérieur en général à plusieurs mètres.

### EXERCICE III NOTION DE COHÉRENCE SPATIALE

1. On note  $\delta_P(M_1, M_2)$  la différence de marche entre les chemins  $PM_1$  et  $PM_2$ . Considérons un point P de côte X, appartenant à la fente source. La différence de marche entre les vibrations lumineuses issues de P en  $S_1$  et  $S_2$  s'écrit

$$\delta_P(S_2, S_1) = PS_2 - PS_1 \approx a \frac{X}{l}.$$

De même, la différence de marche entre les vibrations lumineuses issues de  $S_1$  et  $S_2$  au point M s'écrit

$$\delta_M(S_2, S_1) \approx a \frac{x}{D}.$$

Finalement, on obtient en M l'addition de deux ondes (l'une passant par  $S_1$  et l'autre par  $S_2$ ) déphasées de

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} [\delta_P(S_2, S_1) + \delta_M(S_2, S_1)] = \frac{2\pi}{\lambda} a \left( \frac{X}{l} + \frac{x}{D} \right).$$

La vibration lumineuse  $ds$  au point M s'écrit donc

$$ds(x) = ds_0 + ds_0 e^{i\delta\varphi},$$

avec une intensité  $dI(x) = |ds|^2$  égale à, en notant  $dI_0 = |ds_0|^2$ ,

$$dI(x) = dI_0 \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2\pi a}{\lambda} \left( \frac{X}{l} + \frac{x}{D} \right) \right] \right\}. \quad (\text{III.1})$$

On remarque en particulier que déplacer le point source P d'une distance  $X$  revient à déplacer la figure d'interférence sur l'écran d'une longueur  $-X \frac{D}{l}$ .

Soit  $I(X)$  la densité spatiale d'intensité de la source. La source est une fente homogène, on a donc

$$I(X) = \frac{I_0}{b} \Pi(X; b),$$

où  $\Pi(X; b)$  est la fonction porte centrée en 0, de largeur  $b$ . Un élément de longueur  $dX$  centré en  $X$  émet alors une intensité  $dI_0(X) = I(X) dX$ .

La source étant spatialement incohérente, l'éclairement total est obtenu en sommant les contributions en intensité  $dI(x)$  de chaque élément de la fente selon

$$I(x) = \frac{I_0}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} \left( 1 + \cos \left[ \frac{2\pi a}{\lambda} \left( \frac{x}{D} + \frac{X}{l} \right) \right] \right) dX, \quad (\text{III.2})$$

qui se calcule de façon élémentaire pour donner

$$I(x) = I_0 \left[ 1 + \text{sinc} \left( \pi \frac{ab}{\lambda l} \right) \cos \left( 2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right]. \quad (\text{III.3})$$

**(In)cohérence spatiale** On a ici sommé en intensité les figures d'interférences correspondant à plusieurs points de la source. Cela correspond à l'hypothèse d'incohérence spatiale de la source. Pour une source monochromatique, donc parfaitement cohérente temporellement, chaque point de la source a une relation de phase parfaitement stable avec le centre de la source. Notons par exemple  $\varphi(\vec{r})$  le déphasage du point source situé au point  $\vec{r}$  par rapport au centre de la source. La source peut être considérée comme parfaitement incohérente si  $\varphi(\vec{r})$  est une fonction aléatoire, ou un bruit blanc. En particulier, la valeur de  $\varphi(\vec{r})$  doit être indépendante de la valeur de  $\varphi(\vec{r}')$  prise en tout autre point  $\vec{r}'$  de la source (la fonction de corrélation  $\langle \varphi(\vec{r})\varphi(\vec{r}') \rangle$  est un delta de Dirac), et sa moyenne est nulle sur n'importe quel élément de surface  $d\Sigma$  de la source ( $\langle \varphi(\vec{r}) \rangle_{d\Sigma} = 0$ ).

Pour tout point  $S$  de la source, il se trouve donc nécessairement un autre point source  $S'$ , infiniment proche de  $S$ , déphasé de  $\pi$ . La figure obtenue par interférences entre un troisième point source  $S_0$  et  $S$  est alors la complémentaire de la figure obtenue par interférences entre  $S_0$  et  $S'$  : les franges brillantes de l'une sont les franges sombres de l'autre. Les interférences entre points sources distincts sont donc complètement brouillées. Tout revient ainsi à sommer en intensité plutôt qu'en amplitude les figures correspondants à chaque point source.

**Cône de cohérence** Le contraste des franges d'interférence est ici donné par

$$C(a/l) = \text{sinc} \left( \pi \frac{ab}{\lambda l} \right).$$

En particulier, on voit que **le contraste ne dépend pas de la position de l'écran d'observation** : on dit que *les interférences ne sont pas localisées*. Le contraste dépend en fait **uniquement de la distance entre la fente source et la bifente**. Il caractérise la cohérence de la source elle-même vue depuis la bifente.

La première annulation du contraste a lieu pour une fente source de largeur

$$b_0 = \frac{\lambda l}{a}.$$

On peut interpréter cela en considérant deux sources ponctuelles  $S$  et  $S'$  situées dans le plan de la fente source. Il y a brouillage des interférences quand les deux sources sont telles que leurs figures d'interférence sont décalées de  $\frac{i}{2}$ , où  $i = \lambda D/a$  est l'interfrange. On obtient alors sur l'écran un éclairement uniforme. Puisque déplacer la source de  $X$

déplace la figure d'interférence sur l'écran de  $-XD/l$ , ce brouillage a lieu quand S et S' sont distantes de  $b_0/2$ , avec

$$\frac{b_0 D}{2 l} = \frac{i}{2} = \frac{\lambda D}{2a} \quad \text{soit} \quad b_0 = \frac{\lambda l}{a}.$$

La largeur  $b_0$  de la fente source est la largeur la plus petite pour laquelle, pour tout point de la source, il y a un autre point distant de  $b_0/2$ . Il y a alors brouillage total des interférences.

Étant donné maintenant une fente source de largeur  $b$ , comment faut-il choisir la bifente pour observer une figure d'interférence, *i.e.* pour que les deux sources secondaires soient cohérentes ? Il faut remarquer que le contraste  $C$  ne dépend de  $a$  et  $l$  que via le rapport  $a/l$ , *i.e.* l'angle  $\alpha$  sous lequel est vue la bifente depuis la fente source. Les franges sur l'écran sont alors bien contrastées tant que

$$\alpha \leq \theta_c = \frac{\lambda}{b}. \quad (\text{III.4})$$

On voit ici apparaître l'angle caractéristique  $\theta_c$ , et avec lui la notion de **cône de cohérence**. Tant que la bifente est située à l'intérieur du cône d'angle  $\theta_c$  partant de la fente source, les deux sources secondaires sont cohérentes et la figure d'interférence bien contrastée. Ce cône correspond ainsi à une zone de rayonnement cohérent, d'où l'appellation *cône de cohérence*. Si les deux fentes sortent de ce cône de cohérence en revanche, les deux sources secondaires ne peuvent plus être considérées comme cohérentes entre elles et on ne voit plus de figure d'interférence sur l'écran.

Comme la longueur ou le temps de cohérence étaient d'autant plus petits que la largeur spectrale de la source était grande, le cône de cohérence est d'autant plus étroit que la fente source est large <sup>1</sup>.

On comprend alors pourquoi les étoiles peuvent, malgré leurs grandes tailles, être considérées comme des sources ponctuelles cohérentes spatialement : nous sommes tellement loin d'elles que la Terre est entièrement contenue dans leurs cônes de cohérence (ex : mesure interférométrique de la distance angulaire d'une étoile double).

**Remarque** L'équation (III.4) pourrait se récrire  $\beta \leq \lambda/a$ , où  $\beta = b/l$  est l'angle sous lequel est vue la source depuis la bi-fente. La même notion de cône de cohérence, mais vu depuis la bi-fente cette fois, peut donc être utilisée : la source doit être contenue dans ce cône pour pouvoir la considérer comme une source cohérente.

1. On voit ici poindre une nouvelle relation de transformée de Fourier, démontrée dans les prochaines questions.

2. Avec un laser, la relation de phase entre deux points de la source est parfaitement déterminée par la forme du mode électromagnétique considérée, typiquement un mode gaussien. Le raisonnement précédent n'est plus valable et il faut considérer les interférences entre tous les points de la source : un faisceau laser est cohérent spatialement.
3. On reprend simplement le résultat équation (III.2), en conservant une densité spatiale d'intensité  $I(X)$  a priori quelconque. On a alors

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(X) \left( 1 + \cos \left[ \frac{2\pi a}{\lambda} \left( \frac{x}{D} + \frac{X}{l} \right) \right] \right) dX.$$

On note, comme précédemment,  $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} I(X) dX$  et  $\mathcal{J}(X) = I(X)/I_0$ , la densité spatiale d'intensité normalisée. On peut alors écrire, de façon similaire au résultat de l'équation (I.2),

$$I(X) = I_0 \left[ 1 + \text{Re} \left( \underbrace{e^{2i\pi \frac{ax}{\lambda D}}}_{\text{Interférences}} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(X) e^{2i\pi \frac{aX}{\lambda l}} dX \right)}_{\text{Contraste } C} \right) \right]. \quad (\text{III.5})$$

Pour un profil de raie symétrique autour de  $X = 0$ , *i.e.* si  $\mathcal{J}(X)$  est une fonction paire, l'intégrale dans l'équation précédente est réelle, et l'on obtient finalement,

$$I = I_0 \left[ 1 + C \left( \frac{a}{l} \right) \cos \left( 2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right],$$

où le contraste  $C$  s'écrit

$$C \left( \frac{a}{l} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(X) e^{2i\pi X \frac{a}{\lambda l}} dX.$$

Le contraste de la figure d'interférence est donc donné par la **transformée de Fourier du profil spatial de la source**, calculé ici à la fréquence spatiale  $a/l \times \lambda^{-1}$ . Ce résultat constitue le théorème de VAN CITTERT – ZERNIKE. Il établit que le degré de cohérence spatial entre les deux points  $S_1$  et  $S_2$  et relié à la transformée de Fourier de la densité spatiale d'intensité.

Remarque 1 : On peut retrouver formellement la notion d'angle de cohérence *via* le théorème de Van Cittert – Zernike. L'angle  $\theta_c$  correspond en fait à une largeur «spectrale» de la source, en considérant ici des fréquences spatiales.

Remarque 2 : Le théorème de Van Cittert – Zernike est en réalité plus complexe et plus puissant que la forme présentée ici, quantifiant le degré de cohérence entre deux points quelconques d'un système de sources secondaires. Néanmoins, cette forme est la plus courante et permet de nombreuses applications (mesure de la taille d'une étoile par exemple).

#### EXERCICE IV INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON (IMPORTANT)

1. 1.1 Dans le cas d'une source ponctuelle, les deux lames font office de miroir. On obtient alors deux sources images  $S_1$  et  $S_2$ , ponctuelles, séparées de  $2h$ , cohérentes entre elles. Il s'agit donc d'un système équivalent à deux trous d'Young. La figure d'interférence est donc connue : on retrouve les hyperboloïdes d'interférence obtenus à l'Exercice I. Contrairement au cas précédent, toutefois, l'écran est placé dans un plan perpendiculaire à la bifente. Au point M considéré sur la figure, on observe maintenant des anneaux, de rayons d'autant plus grands que l'écran est éloigné de la lame, et centrés sur l'axe de la bifente.

1.2 *Cas d'une source étendue* Si l'on ouvre maintenant la source, par exemple dans un plan parallèle à l'écran, la source étant incohérente spatialement, on additionne les figures d'interférence générées par chaque point de la source. On observe donc la somme d'anneaux d'interférence dont le centre est à une position sur l'écran qui dépend du point source considéré. A priori, il y a donc brouillage des interférences : les anneaux ne se superposent pas.

Il existe toutefois **une** position de l'écran pour laquelle il n'y a pas de brouillage : l'infini. Dans ce cas, en effet, seule l'inclinaison des rayons lumineux importe ; un déplacement spatial de la source parallèlement à l'écran ne modifie pas la figure observée. Les anneaux d'interférence correspondant aux différents points de la fente source sont alors tous centrés au même point de l'écran, les anneaux se superposent et il n'y a plus de brouillage.

Parce qu'il existe une position particulière de l'écran pour laquelle le contraste des interférences dépend de façon minimale de la taille de la source (ici, il n'en dépend même plus du tout), on dit que les interférences sont **localisées** en ce point, en l'occurrence à l'infini.

1.3 On considère une lame d'épaisseur  $e$ , d'indice  $n$  (FIG. 4.1). La différence de marche

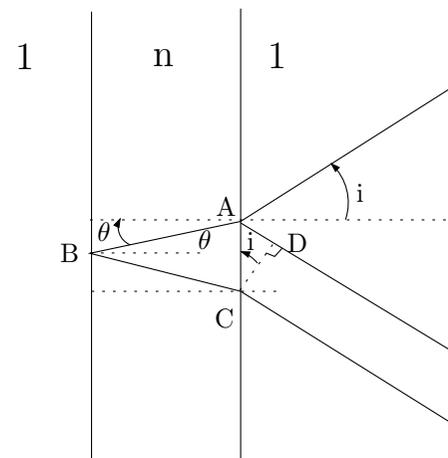


FIGURE 4.1 – Différence de marche introduite par une lame d'épaisseur  $e$ .

s'écrit

$$\delta = n(AB + BC) - AD = 2n AB - AD.$$

D'après les lois de Descartes,  $\sin i = n \sin \theta$ , d'où

$$AD = AC \sin i = AC n \sin \theta.$$

Or

$$AC = 2AB \sin \theta \quad \text{et} \quad AB = \frac{e}{\cos \theta}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2en}{\cos \theta} - 2n \sin^2 \theta \left( \frac{e}{\cos \theta} \right), \\ &= \frac{2en}{\cos \theta} (1 - \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

D'où le résultat

$$\boxed{\delta = 2ne \cos \theta}.$$

Dans le cas de l'air,  $n = 1$  (et  $\theta = i$ ) donc  $\delta = 2ne \cos \theta$ .

2. En considérant le miroir  $M_1$  et le miroir  $M_2'$  image de  $M_2$  par rapport à  $S$ , l'interféromètre de Michelson est l'exact équivalent de la lame d'air étudiée à la question précédente.

- 2.1 a. On reprend alors les résultats précédents : la différence de marche entre deux rayons d'angle d'incidence  $\theta$  sur les miroirs s'écrit  $\delta = 2e \cos \theta$ , où  $e = M_2 M_1$ .
- b. Comme pour la lame d'air, les franges d'interférences sont localisées à l'infini. Pour les observer, on place en sortie de l'interféromètre une lentille de focale  $f$ . L'écran d'observation est placé dans le plan focal image de la lentille. Un rayon d'incidence  $\theta$  sur les miroirs arrive alors sur l'écran à une distance  $r(\theta) = f \tan \theta \sim f\theta$  du centre de l'écran.
- c. En un point  $M$  de l'écran, situé à une distance  $r$  du centre de la figure, la différence de marche  $\delta(r)$  entre les deux rayons incidents ne dépend que de  $\theta = r/f$ , *i.e.* l'inclinaison de ces faisceaux sur l'axe (au niveau de l'interféromètre). La figure d'interférence observée est donc bien une figure en anneaux. On dit qu'on observe des **anneaux d'égale inclinaison**.  
Pour observer l'ensemble de la figure d'interférence, ou encore pour observer plusieurs anneaux, il faut que de nombreuses inclinaisons soient mises en jeu. On veillera donc à éclairer l'interféromètre avec un faisceau bien divergent.
- d. *Rayon des anneaux brillants* Un anneau de rayon  $r$  correspond à une frange brillante si la différence de marche  $\delta(r)$  peut s'écrire  $\delta(r) = p\lambda_0$ , où  $p \in \mathbb{Z}$ . En utilisant l'expression de  $\delta$  trouvée précédemment, on obtient

$$\cos \theta(r) = \frac{p\lambda_0}{2e}. \quad (\text{IV.1})$$

On suppose que le centre de la figure est brillant. Cela signifie que

$$\cos(\theta = 0) = 1 = \frac{p_0\lambda_0}{2e}, \quad p_0 \in \mathbb{Z};$$

l'intervalle  $e$  est un multiple de  $\lambda_0$ .

On note alors  $k = p_0 - p$ . L'anneau d'ordre  $p$  est le  $k^{\text{ième}}$  anneau de la figure d'interférence. On note  $r_k = f\theta_k$  son rayon. En se plaçant dans l'approximation de Gauss, *i.e.* à la limite des petits angles,  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$  et

$$1 - \frac{\theta_k^2}{2} = \frac{p\lambda_0}{2e} = \frac{(p_0 - k)\lambda_0}{2e}.$$

D'où

$$\theta_k = \sqrt{k \frac{\lambda_0}{e}},$$

et

$$r_k = f \sqrt{k \frac{\lambda_0}{e}}.$$

**Attention!** Ces relations sont trompeuses : elle donnent la valeur du rayon du  $k^{\text{ième}}$  anneau sur l'écran quand le centre est brillant. Elles ne permettent donc pas de suivre l'évolution du rayon d'un anneau donné quand on varie  $e$ . Par exemple, elles permettent de comparer le rayon du premier anneau brillant quand  $e = e_1 = p_0\lambda_0$  et du premier anneau brillant quand  $e = e_2 = (p_0 + 1)\lambda_0$ . Si l'on passe continûment de  $e_1$  à  $e_2$ , le premier anneau brillant quand  $e = e_1$  devient... le *deuxième* anneau brillant, quand  $e = e_2$  (en supposant  $p_0 > 0$ ). Il faudrait donc comparer  $r_{k=1}(e_1)$  à  $r_{k=2}(e_2)$  pour déterminer comment le rayon des anneaux varie quand on modifie  $e$ .

En pratique, il faut toujours revenir à la relation  $\cos i = \frac{p\lambda_0}{2e}$ .

- e. Si  $e = 0$ , alors pour toute inclinaison  $\theta$ , ou encore pour tout point  $r$  sur l'écran,  $\delta(r) = 0$  : les interférences sont constructives. L'éclairement est uniforme, on dit qu'on obtient une **teinte plate**. Ce point particulier, qui correspond au point où  $M_2'$  et  $M_1$  sont confondus, *i.e.* que  $M_1$  et  $M_2$  sont symétriques l'un de l'autre par rapport à  $S$ , ou encore que les deux bras du Michelson ont la même longueur est appelé **contact optique**.

En pratique, on cherche toujours le contact optique quand on règle le Michelson. Cela permet de lire directement sur le vernier la différence de longueur entre les deux bras du Michelson.

Imaginons maintenant que l'on augmente  $|e|$ , à partir de n'importe quel point. Dans ce cas, d'après l'équation (IV.1),  $\cos \theta$  diminue, donc  $\theta$  et  $r$  augmentent : les anneaux semblent sortir du centre de la figure.

On retient donc que si  $|e|$  augmente, *i.e.* si l'on s'éloigne du contact optique, les anneaux semblent sortir, alors qu'ils rentrent si l'on se rapproche du contact optique.

- f. L'interféromètre de Michelson, comme l'interféromètre à trous d'Young, est un interféromètre à deux ondes. Contrairement au dispositif à trous d'Young toutefois, il est possible, avec un interféromètre de Michelson d'utiliser des sources étendues sans perte de contraste, et donc d'avoir des figures d'interférence beaucoup plus lumineuses.

- 2.2 a. Les diverses composantes spectrales sont incohérentes entre elles. On somme donc les figures d'interférences et on obtient sur l'écran la superposition des plusieurs systèmes d'anneaux, associés à chaque longueur d'onde, dont le rayon dépend de  $\lambda$ . On observe ainsi des anneaux de couleurs différentes, voire un brouillage des interférences.
- b. On suppose maintenant que la source n'émet qu'à deux longueurs d'onde, notées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On additionne donc les figures d'interférences obtenues pour chaque longueur d'onde. Au centre de l'écran, la différence de marche est  $\delta = 2e$ , et l'intensité s'écrit alors

$$\begin{aligned} I(e) &= \frac{I_0}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right) \right] + \frac{I_0}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2}\right) \right] \\ &= I_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda_1}\right) + \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda_2}\right) \right] \\ &= I_0 \left[ 1 + \cos\left(2\pi e \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \cos\left(2\pi e \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \right]. \end{aligned}$$

En introduisant  $\bar{\lambda} = \left(\frac{\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1}}{2}\right)^{-1}$ , on a alors

$$I(e) = 2I_0 \left[ \underbrace{1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{\bar{\lambda}}\right)}_{\text{interférences}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi e}{\lambda_1 \lambda_2} \Delta\lambda\right)}_{\text{contraste}} \right]. \quad (\text{IV.2})$$

**Remarque** L'équation (IV.2) prend une forme plus simple en utilisant la fréquence moyenne  $\bar{\nu} = (\nu_1 + \nu_2)/2$  et l'écart en fréquence  $\Delta\nu$  du doublet :

$$I(e) = 2I_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{c} \bar{\nu}\right) \cos\left(\frac{2\pi e}{c} \Delta\nu\right) \right].$$

En pratique, on a  $\Delta\lambda \ll \lambda_1, \lambda_2$ , et l'on peut récrire l'équation (IV.2) sous la forme

$$I(e) = 2I_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi e}{\lambda_1^2} \Delta\lambda\right) \right]. \quad (\text{IV.3})$$

- c. En variant  $e$ , on observe la variation d'éclairement tracée FIG. 4.2, figure dite de *battements* entre les deux longueurs d'onde. On peut mesurer la longueur

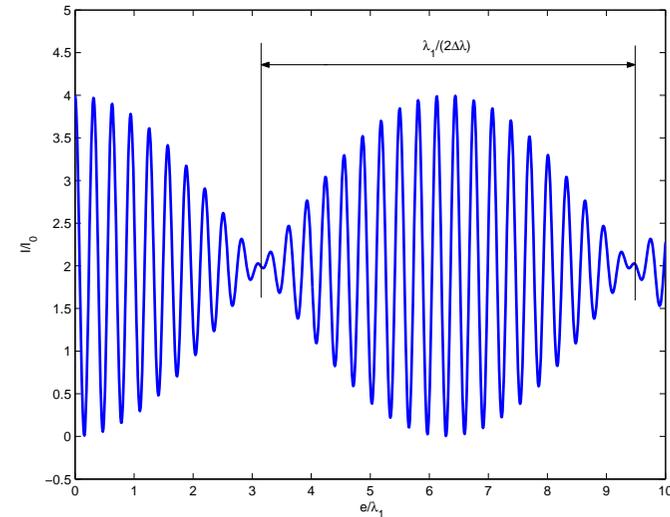


FIGURE 4.2 – Allure de l'interférogramme dans le cas du doublet du Sodium.

d'onde moyenne  $\bar{\lambda} \approx \lambda_1, \lambda_2$  en mesurant la période rapide des battements et  $\Delta\lambda$  en mesurant leur période lente (Cf. TP Spectrométrie).

On a ici annulation du contraste pour

$$\frac{2\pi e \Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Entre deux annulations, on a charioté de  $\Delta e$  tel que

$$\frac{2\pi \Delta e \Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \pi, \quad \text{soit} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda_1^2}{2\Delta e}.$$

Les oscillations rapides de période  $\delta e$  sont telles que  $\frac{4\pi \delta e}{\lambda_1} = 2\pi$  soit

$$\lambda_1 = 2\delta e.$$

**Applications numériques** Pour le doublet du mercure,  $\delta e = 289,0$  nm et  $\Delta e = 151,8$   $\mu\text{m}$ . Pour le doublet du sodium,  $\delta e = 294,5$  nm et  $\Delta e = 588,6$   $\mu\text{m}$ .

3. Si on introduit un angle  $\alpha$  entre les deux miroirs, on dit qu'on obtient un **coin d'air**, plutôt qu'une lame d'air. La différence de marche entre deux rayons, issus d'un même faisceau en entrée de l'interféromètre, est proportionnelle à l'épaisseur du coin d'air à l'endroit où les rayons interceptent les miroirs. Quand on se déplace le long du coin d'air, l'épaisseur du coin d'air  $e(x)$ , et donc la différence de marche  $\delta$ , varie linéairement avec la distance  $x$  au sommet du coin d'air. Pour des rayons en incidence normale, on a simplement  $\delta = 2e(x) = 2\alpha x$ . Si l'on fait l'image du coin d'air sur un écran, on observe alors des franges rectilignes (les franges brillantes correspondent à  $\delta = p\lambda$ , où  $p \in \mathbb{Z}$ , soit  $x = p\lambda/2$ ), appelées **franges d'égal épaisseur**.

Pour des angles d'incidence non nuls, la différence de marche au même point  $x$  est plus petite que  $2e$ . Si on éclaire le coin d'air avec un faisceau non collimaté, on superpose alors des figures d'interférence d'interfranges différents, réduisant alors le contraste. On éclaire donc toujours un coin d'air avec un faisceau parallèle ! Dans ce cas, en ouvrant la source, on augmente la zone éclairée du coin d'air sans pour autant brouiller les franges d'interférence : le contraste des franges ne dépend (quasiment) pas de la largeur de la source quand on les observe au niveau du coin d'air, et au niveau du coin d'air seulement : les interférences sont **localisées sur le coin d'air**.

Pour illustrer la localisation des interférences dans le cas du coin d'air, on considère les deux situations de la figure 4.3. On considère deux points sources  $S_1$  et  $S_2$  proches l'un de l'autre et on trace les rayons issus de ces points, se réfléchissant sur les deux miroirs du Michelson, et passant par un point  $P$  dont on fait l'image sur l'écran d'observation. Quand le point  $P$  est sur ou proche du coin d'air, la différence de marche  $\delta_1$  entre les rayons issus de  $S_1$  est  $2e$ , tout comme celle entre les rayons issus de  $S_2$  ( $\delta_2 \approx 2e$ ). Les figures d'interférence associées à chaque point source sont donc quasiment identiques et il n'y a pas de brouillage des interférences.

En revanche, dès que l'on éloigne le point  $P$  du coin d'air, on constate que les rayons issus de  $S_1$  et les rayons issus de  $S_2$  s'éloignent significativement les uns des autres, autrement dit que  $\delta_1$  devient très différent de  $\delta_2$ . Dans cette configuration, le contraste varie beaucoup plus rapidement avec l'ouverture de la source (ou, de façon équivalente, avec la distance entre  $S_1$  et  $S_2$ ) que dans le cas précédent. Le contraste varie finalement à minima quand on fait l'image sur l'écran d'observation de points proches du coin d'air. Encore une fois, les franges du coin d'air sont localisées sur le coin d'air.

**Remarque** Contrairement à ce qu'on avait obtenu pour la lame d'air du Michelson, le contraste dépend en fait encore de la largeur de la source, mais au deuxième ordre

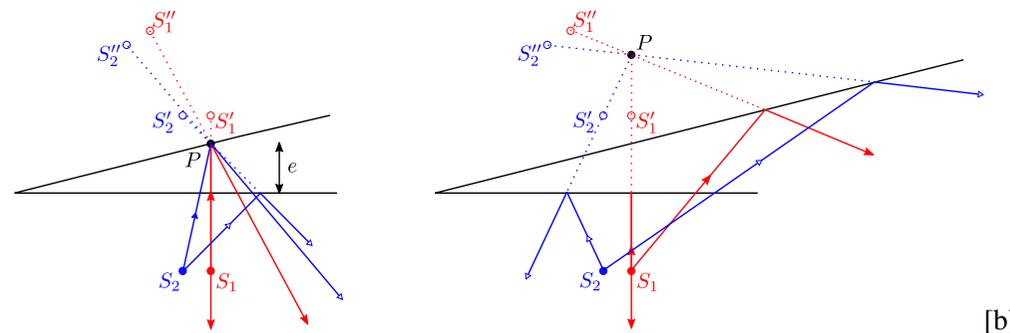


FIGURE 4.3 – Localisation des franges du coin d'air. On trace les rayons issus de deux sources,  $S_1$  et  $S_2$ , et passant par un point  $P$  dont on fait l'image sur l'écran. Il n'y a pas de brouillage des interférences si la différence de marche entre les chemins est sensiblement la même pour les rayons issus de  $S_1$  et les rayons issus de  $S_2$ . Les points sources secondaires  $S'$  et  $S''$  sont les images des points sources  $S$  par réflexion par les miroirs du Michelson.

seulement. Cet effet peut être mis en évidence expérimentalement, cf Sextant p.164.

On peut se convaincre relativement aisément que la variation du contraste avec la taille de la source ne varie que quadratiquement lorsqu'on fait l'image du coin d'air, alors qu'elle varie linéairement autrement. On s'intéresse à la variation de la différence de marche  $\delta_1 - \delta_2$  quand la source est déplacée de  $S_1$  vers  $S_2$ , *i.e.* de  $\delta$  parallèlement au miroir  $M_1$  (voir figure 4.4). Sur les figure 4.4.a et b, on constate que la variation  $S_1P - S_2P$  n'est quadratique en  $\delta$  que si  $(S_1P)$  est orthogonale à  $(S_1S_2)$ , et est linéaire en  $\delta$  autrement. Une façon de s'assurer que  $\delta_1 - \delta_2 = (S'_1P - S'_2P) - (S''_1P - S''_2P)$  soit quadratique en  $\delta$  est donc de faire en sorte que  $P$  soit à l'intersection des droites orthogonales à  $(S'_1S'_2)$  – et donc à  $(S_1S_2)$  puisque  $(S_1S_2) \parallel (S'_1S'_2)$  – et à  $(S''_1S''_2)$ . Ce point d'intersection est nécessairement sur le miroir  $M'_2$ ,  $(S_1S_2)$  et  $(S''_1S''_2)$  étant symétriques par rapport à lui (voir figure 4.4). Autrement dit, la variation de différence de marche dépend quadratiquement de l'étendue de la source quand le point d'observation est sur le miroir  $M'_2$ , *i.e.* sur le coin d'air, linéairement autrement <sup>2</sup>.

**Remarque** Au centre de la figure, la différence de marche est nulle quelle que soit la longueur d'onde :  $\delta = 2e = 0$ . On observe en pratique une frange sombre sur

2. On pourrait aussi imaginer que la variation linéaire en  $\delta$  de  $S'_1P - S'_2P$  vienne exactement compenser celle de  $S''_1P - S''_2P$ . On laisse au lecteur le soin de déterminer le lieu de ces points.

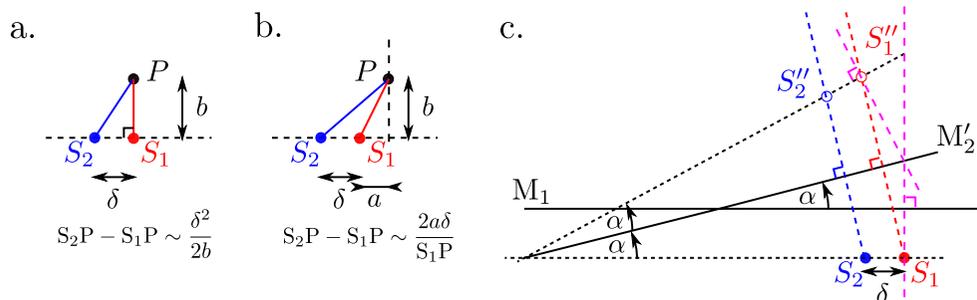


FIGURE 4.4 – Différence entre les distances  $S_1P$  et  $S_2P$  quand  $(S_1P)$  est orthogonal à  $(S_1S_2)$  (a.) ou non (b.). (c.) Le point d'intersection des droites orthogonales à  $(S_1S_2)$  et  $(S_1''S_2'')$  est situé sur le miroir  $M_2'$ , *i.e.* sur le coin d'air.

l'écran, et non brillante, à cause du déphasage supplémentaire de  $\pi$  entre les deux bras du Michelson<sup>3</sup>, induit par la séparatrice  $\mathcal{S}$ . En s'éloignant du centre, en revanche, la différence de marche dépend de la longueur d'onde et l'on observe alors, en éclairant le Michelson avec de la lumière blanche, des irisations, correspondant à la superposition de franges dont l'interfrange dépend de la longueur d'onde. Plus on s'éloigne du centre, plus le déphasage  $2\pi\delta/\lambda$  et donc plus l'éclairement varie rapidement avec  $\lambda$ . Loin du centre, on ne distingue alors plus les irisations, mais une teinte blanche appelée **blanc d'ordre supérieur** : en un point de l'écran, le spectre de l'éclairement n'est pas plat, mais *cannelé* (il n'y a par exemple pas de contribution des longueurs d'onde  $\lambda$  pour lesquelles, en ce point,  $\delta = p\lambda$ ).

### EXERCICE V INTERFÉROMÈTRE DE FABRY-PÉROT (IMPORTANT)

1. 1.1 Pour calculer la figure d'interférence observée en sortie du Fabry-Pérot, il faut considérer a priori tous les faisceaux en sortie de l'interféromètre, et non plus seulement 2 comme on l'avait fait dans le cas de la lame d'air. Le coefficient de réflexion des miroirs étant très proche de l'unité, tous ces faisceaux ont des intensités similaires (du moins pour les premiers), et on ne peut donc pas, a priori, négliger la contribution de l'un par rapport à l'autre à la figure d'interférence. On parle d'interférences à ondes multiples.

Il faut donc calculer l'amplitude et la phase de chacun des faisceaux en sortie de l'interféromètre. Il faut pour cela calculer la différence de marche correspondant

3. C'est en fait encore un peu plus compliqué que ça, cf. Sextant p.233, note 32

au chemin séparant les deux miroirs. Par un calcul identique à celui de l'exercice précédent, on trouve

$$\delta_0 = e \cos i,$$

où  $i$  est l'angle d'incidence des rayons sur les miroirs. On note, pour la suite,  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(2\delta_0) = \frac{4\pi e}{\lambda} \cos i$ , le déphasage accumulé par l'onde lors d'un aller-retour entre les parois du Fabry-Pérot.

On note  $\tilde{s}_0$  l'amplitude complexe de l'onde à l'entrée du Fabry-Pérot. L'amplitude du premier rayon transmis, qui a donc été transmis par deux miroirs (coefficient  $t^2$ ) et a accumulé un déphasage  $\varphi/2$  s'écrit

$$s_0 = t e^{i\frac{\varphi}{2}} t \times \tilde{s}_0.$$

Le rayon émergent suivant a subi deux réflexions supplémentaires sur les miroirs (coefficient  $r^2$ ) et accumulé un déphasage supplémentaire égale à  $2 \times \varphi/2$ , soit

$$s_1 = t e^{i\frac{\varphi}{2}} r e^{i\frac{\varphi}{2}} r e^{i\frac{\varphi}{2}} t \times \tilde{s}_0 = s_0 r^2 e^{i\varphi}.$$

On étend facilement au calcul des ondes émergentes suivantes. L'amplitude du  $n^{\text{ième}}$  rayon s'écrit

$$s_n = s_0 (r^2 e^{i\varphi})^n.$$

La vibration lumineuse en sortie de l'interféromètre est alors la somme des vibrations lumineuses  $s_n$  issues de toutes les réflexions :

$$s = \sum_{n \geq 0} s_n = s_0 \sum_{n \geq 0} (r^2 e^{i\varphi})^n = \tilde{s}_0 \frac{t^2 e^{i\varphi/2}}{1 - r^2 e^{i\varphi}}.$$

Le déphasage  $\varphi$  ne dépend que de l'inclinaison des faisceaux, comme pour la lame d'air (du Michelson). De façon similaire, les interférences sont alors localisées à l'infini, et la figure d'interférence présente des anneaux d'égale inclinaison. L'intensité sur un écran placé à l'infini s'écrit

$$\begin{aligned} I(i) &= |s(i)|^2 = I_0 \frac{T^2}{|1 - r^2 e^{i\varphi}|^2}, \\ &= I_0 \frac{T^2}{(1 - r^2 e^{i\varphi})(1 - r^{*2} e^{-i\varphi})}. \end{aligned}$$

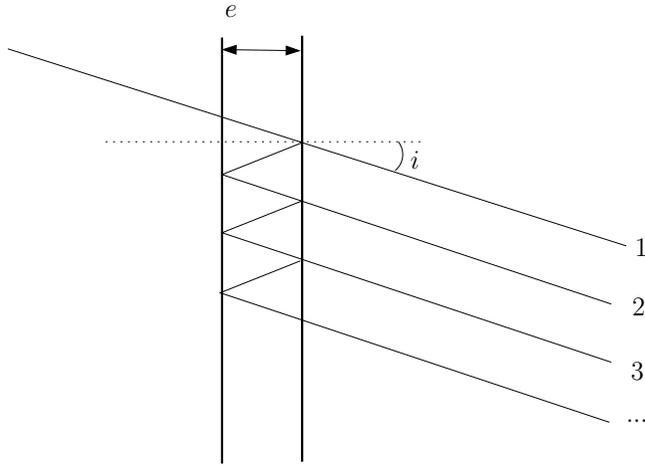


FIGURE 5.1 – Interférences à ondes multiples dans le cas d'un Fabry-Pérot.

À une redéfinition de  $\varphi$  près, on peut supposer  $r$  réel, et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}, \\ &= \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos \varphi)}, \\ &= \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

Or, dans un bon interféromètre, l'absorption est négligeable, *i.e.*  $T + R = 1$ , soit finalement

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

On a un maximum d'intensité quand  $\frac{\varphi}{2} = m\pi \Leftrightarrow \varphi = 2m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Le maximum vaut alors

$$I_{\max} = I_0.$$

L'écart entre deux maxima d'intensité, ou résonances, est simplement  $\Delta\varphi = 2\pi$ .

On a un minimum d'intensité quand  $\frac{\varphi}{2} = m\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi = (2m + 1)\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Le minimum vaut alors

$$I_{\min} = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}}.$$

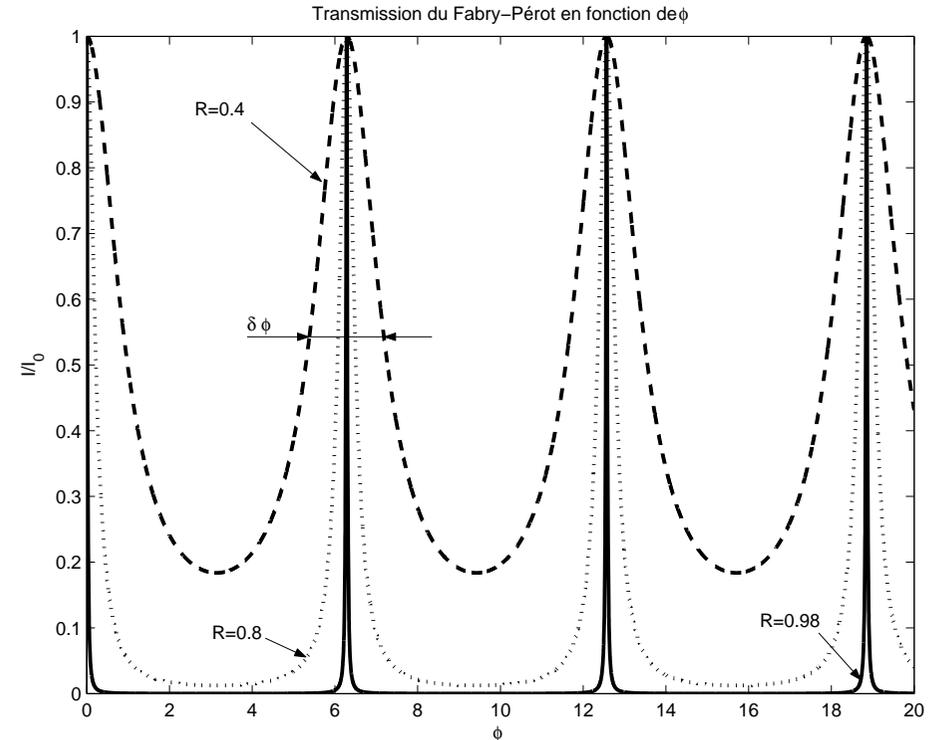


FIGURE 5.2 – Transmission d'un Fabry-Pérot en fonction de  $\varphi$ . Influence du coefficient de réflexion.

1.2 On cherche maintenant à calculer la largeur à mi-hauteur  $\delta\varphi$  d'un pic de résonance. Par définition, on a

$$I\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) = \frac{I_0}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta\varphi}{4} = 2,$$

soit

$$\sin^2 \frac{\delta\varphi}{2} = \frac{(1-R)^2}{4R}.$$

Pour des pics suffisamment fins,  $\delta\varphi \ll 2\pi$ , et l'on trouve

$$\sin^2 \frac{\delta\varphi}{2} \approx \frac{\delta\varphi^2}{4} \frac{(1-R)^2}{4R},$$

d'où finalement

$$\delta\varphi = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}},$$

qui est bien petit devant  $2\pi$ .

La finesse  $\mathcal{F}$  du Fabry-Pérot s'écrit alors

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}.$$

C'est une fonction croissante de  $R$  qui quantifie la *finesse* des pics de résonance : plus la finesse de l'interféromètre est élevée, plus les pics sont fins et donc meilleure est la résolution.

**Remarque** Pour un interféromètre à 2 ondes, comme le Michelson en lame d'air, la figure d'interférence est une sinusoïde pour laquelle on trouverait une finesse  $\mathcal{F} = \Delta\varphi/\delta\varphi = 2\pi/\pi = 2$ . En fait, un interféromètre de finesse  $\mathcal{F}$  est l'équivalent d'un interféromètre à  $\mathcal{F}$  ondes. Un Fabry-Pérot de finesse  $\mathcal{F}$  est ainsi aussi performant qu'un réseau à  $N = \mathcal{F}$  fentes.

1.3 Si le centre des anneaux est brillant, alors

$$\varphi(i=0) = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda} = \frac{4\pi e}{\lambda} = 2p_0\pi, \quad p_0 \in \mathbb{Z}.$$

Soit  $p$  l'ordre d'interférence d'un anneau brillant, correspondant à l'angle d'incidence  $i_p$  :

$$\cos i_p = \frac{\lambda}{2e} p.$$

Un ordre d'interférence  $p$  plus élevé correspond à un  $\cos i_p$  plus élevé et donc à  $i_p$  plus faible. Le  $k^{\text{ième}}$  anneau correspond donc à l'ordre  $p_0 - k$  :

$$\cos i_{k=p_0-p} = \frac{\lambda}{2e} (p_0 - k).$$

Pour des faibles angles d'inclinaison,  $\cos i_k \approx 1 - i_k^2/2$  et

$$i_k = \sqrt{\frac{\lambda k}{e}}.$$

2. 2.1 On observe l'anneau d'incidence  $i$ . Si l'on suppose qu'on a une frange brillante pour une fréquence  $\nu_0$  donnée, on aura une nouvelle frange brillante pour  $\nu_1 = \nu_0 + \Delta\nu$  tel que

$$\begin{aligned} \varphi(\nu_1) - \varphi(\nu_0) &= \frac{4\pi e \cos i}{c} \Delta\nu = 2\pi \\ \text{soit } \Delta\nu &= \frac{c}{2e \cos i}. \end{aligned}$$

L'intervalle spectral libre (ISL) du Fabry-Pérot s'écrit donc

$$\Delta\nu_{\text{ISL}} = \frac{c}{2e'},$$

où  $e' = e \cos i$  est la largeur effective de l'interféromètre. Au centre des anneaux, en particulier,  $e' = e$ .

La largeur spectrale  $\delta\nu$  d'un pic de résonance est l'intervalle de fréquence correspondant à une variation  $\delta\varphi$  de la phase  $\varphi$  définie plus haut. Puisque  $\varphi = \frac{4\pi e'}{c} \nu$ , on a simplement

$$2\pi\delta\nu = \frac{c}{2e'} \delta\varphi = \Delta\nu_{\text{ISL}} \left( \frac{\Delta\varphi}{\mathcal{F}} \right) = 2\pi \frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\mathcal{F}}.$$

La finesse  $\mathcal{F}$  de l'interféromètre peut donc finalement s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\delta\nu},$$

*i.e.* le rapport entre l'intervalle spectral libre et la plus petite variation de fréquence mesurable avec l'interféromètre. Cette relation est valable quel que soit l'anneau considéré : la finesse de l'interféromètre est une grandeur intrinsèque qui ne dépend pas des conditions d'utilisation, ici par exemple de l'angle d'inclinaison observé.

2.2 Toujours pour une inclinaison  $i$  donnée, on cherche à déterminer la variation minimale  $\delta\lambda$  de longueur d'onde que l'on pourra détecter autour d'une longueur d'onde  $\lambda$  donnée, supposée telle que l'anneau est brillant pour  $\lambda$  (c'est là qu'on a le maximum de sensibilité). Comme précédemment, on a donc

$$\lambda = \frac{2e'}{p} = \frac{c}{p\Delta\nu_{\text{ISL}}},$$

où  $p \in \mathbb{N}$  est l'ordre d'interférence. On a par ailleurs  $\nu = c/\lambda$  et donc

$$\begin{aligned} \delta\nu &= c \frac{\delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{c}{\lambda} \frac{\delta\lambda}{\lambda} = p\Delta\nu_{\text{ISL}} \frac{\delta\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

On en déduit finalement le **facteur de qualité**  $Q$

$$Q = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\nu}{\delta\nu} = p\mathcal{F}.$$

Le facteur de qualité, ou pouvoir de résolution, est défini comme l'inverse de la variation relative minimale de fréquence ou de longueur d'onde détectable par l'interféromètre. Il est d'autant plus grand que la finesse est grande et que l'ordre d'interférence est élevé. Contrairement à la finesse, sa valeur dépend donc de la façon dont on se sert de l'interféromètre !

2.3 On suppose que la source a deux composantes spectrales,  $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$ . On observe donc la superposition de deux systèmes d'anneaux, de rayons différents. Les anneaux correspondants à ces deux longueurs d'onde sont distinguables si la largeur d'un anneau est plus petite que la distance entre deux anneaux.

**Largeur d'un anneau** Pour connaître la largeur d'un anneau brillant d'angle  $i_p$  tel que  $\cos i_p = p\lambda/(2e)$ , il suffit de calculer la variation  $\delta i$  qui induit une variation  $\delta\varphi$  de la phase. Puisque  $\varphi = 4\pi e \cos i/\lambda$ , on a simplement

$$\delta\varphi = \frac{4\pi e}{\lambda} \sin i \delta i, \quad \text{soit} \quad \delta i = \frac{\lambda}{4\pi e \sin i} \delta\varphi = \frac{\lambda}{4\pi e \sin i} \frac{2\pi}{\mathcal{F}} = \frac{\lambda}{2e \sin i} \frac{1}{\mathcal{F}}.$$

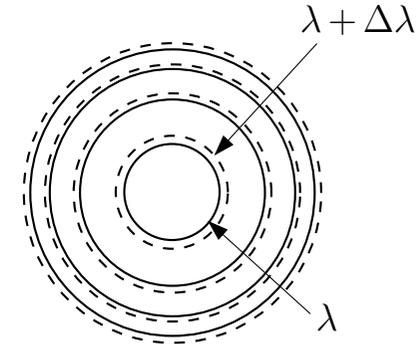


FIGURE 5.3 – Anneaux à la sortie du Fabry-Pérot pour une source polychromatique ( $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$ ).

**Distance entre deux anneaux** Il faut cette fois estimer la variation  $\Delta i$  qui correspond, à l'ordre d'interférence  $p$ , à la variation  $\Delta\lambda$  de longueur d'onde :

$$\sin i \Delta i = p \frac{\Delta\lambda}{2e}, \quad \text{soit} \quad \Delta i = p \frac{\Delta\lambda}{2e \sin i}.$$

L'intervalle spectral  $\delta\lambda$  minimal pour lequel les anneaux d'interférence sont encore distinguables vérifie donc

$$\delta i = \Delta i \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = p\mathcal{F} = Q.$$

On retrouve la même relation que précédemment faisant intervenir le facteur de qualité du Fabry-Pérot.

#### EXERCICE VI AGRÉGATION 2005, ÉPREUVE A (PREMIÈRE PARTIE)

Cf. BUP et <http://www.agregation-physique.org>.