Clément Sayrin
clement.sayrin@lkb.ens.fr

TD d'Optique 2

Interférences – Notion de cohérence

16/09/2020

Exercice I Notion de cohérence temporelle

On considère un dispositif à trous d'Young (Fig. 1.1). Une source S, considérée comme ponctuelle, illumine deux trous, S_1 et S_2, situés à une distance l de la source. Les trous S_1 et S_2 sont infiniment petits et séparés d'une distance a.

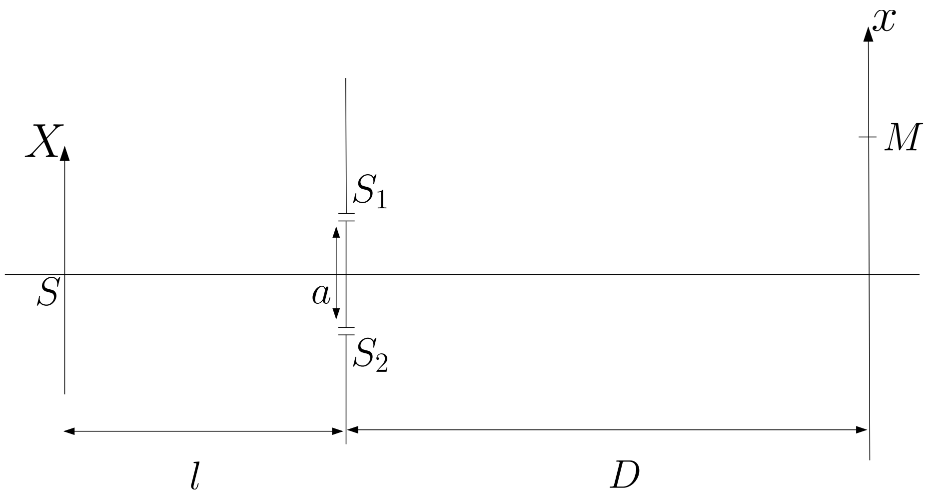

Figure 1.1 – Dispositif à trous d'Young, source ponctuelle.

1. On suppose que la source est purement monochromatique à la fréquence ν. Décrire ce que l'on observe sur l'écran situé à la distance D des bi-trous. On précisera bien toutes les approximations faites.

2. Que se passe-t-il si la source est composée de deux raies spectrales monochromatiques de fréquences ν_1 et ν_2 ?

3. On considère une source de profil spectral $\mathcal{I}(\nu)$, centré sur une fréquence ν_0, de largeur Γ supposée petite devant ν_0 : $\Gamma \ll \nu_0$. Par définition, l'intensité lumineuse émise dans une bande spectrale centrée sur ν, de largeur $d\nu$, est $\mathcal{I}(\nu)\,d\nu$.

   3.1 Calculer la figure d'interférence et montrer qu'elle est similaire à celle obtenue pour une source monochromatique à ν_0, à une variation spatiale du contraste C près qu'on exprimera en fonction de $\mathcal{I}(\nu)$. On introduira la notation $I_0 = \int \mathcal{I}(\nu)\,d\nu$.

   3.2 Application au cas d'un fonction porte : $\mathcal{I}(\nu) = \dfrac{I_0}{\Gamma}$ si $\nu \in [\nu_0 - \Gamma/2, \nu_0 + \Gamma/2]$, $\mathcal{I}(\nu) = 0$ sinon.

   3.3 Application au cas d'une raie lorentzienne, de profil spectral

   $$\mathcal{I}(\nu) = I_0 \frac{2}{\pi\Gamma} \frac{1}{1 + 4\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Gamma}\right)^2}.$$

   On donne

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi\Gamma} \frac{1}{1 + 4\left(\frac{\nu}{\Gamma}\right)^2} e^{-2i\pi\nu t}\,d\nu = e^{-\pi\Gamma|t|}.$$

Exercice II Modèle des trains d'onde et cohérence temporelle

On modélise une source thermique comme une assemblée d'atomes excités qui émettent une succession de trains d'ondes, *i.e.* des vibrations lumineuses sinusoïdales de durée finie. Considérons un de ces trains d'onde, $U(t)$, centré en $t = 0$ et de durée τ :

$$\begin{cases} U(t) = & e^{i\varphi}\, e^{2i\pi\nu_0 t}, \quad |t| < \tau/2, \\ U(t) = & 0, \quad |t| > \tau/2. \end{cases}$$

La phase φ est constante sur la durée du train d'onde mais varie aléatoirement d'un train d'onde à un autre.

1. Quel est le spectre, en fréquences temporelles, d'un seul train d'onde de durée τ ?

2. La source émet une succession de trains d'onde identiques mais de phases relatives aléatoires. Quel est le spectre de la lumière émise par cette source ?

3. Soit $\delta\nu$ la largeur du spectre (intervalle entre les deux premières annulations). Quelle relation y a-t-il entre $\delta\nu$ et τ ?

Clément Sayrin
clement.sayrin@lkb.ens.fr

4. Que vaut l'intervalle de longueur d'onde $\delta\lambda$ correspondant ? Définir la longueur de cohérence et le temps de cohérence, et les calculer pour
   — la lumière blanche,
   — une raie de lampe spectrale (par exemple, pour une lampe à vapeur de mercure basse pression, l'élargissement Doppler de la raie verte à $\lambda_0 = 546\,\text{nm}$ est de l'ordre de $\delta\lambda \approx 0,03\,\text{nm}$),
   — un laser He-Ne, de largeur spectrale $\delta\nu \approx 1\,\text{GHz}$ typiquement.

Exercice III Notion de cohérence spatiale

On considère le même dispositif à trous d'Young que précédemment, mais la source S est maintenant constituée d'une fente source de largeur b (Fig. 3.1). Les deux trous S_1 et S_2 sont maintenant des fentes, parallèles à la fente source, mais infiniment fines. On note S' un point courant de la fente source. On suppose, dans tous les cas, que la source est parfaitement monochromatique, de longueur d'onde λ : elle est parfaitement cohérente temporellement.

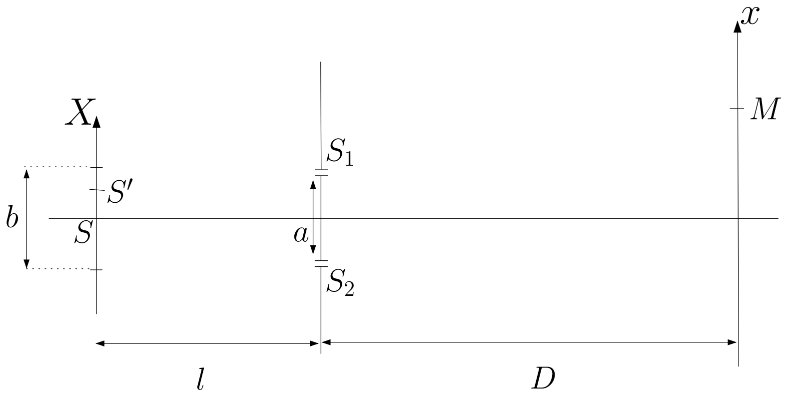

Figure 3.1 – Dispositif à trous d'Young, source étendue.

1. Décrire quantitativement la figure d'interférence en fonction des différents paramètres du problème. Faire apparaître une fonction de contraste des interférences, C. De quels paramètres dépend-elle ?
2. Les résultats de la question précédente sont-ils toujours valides si l'on éclaire maintenant la bifente avec un faisceau laser ?
3. On considère une source spatialement incohérente et dont la répartition spatiale d'intensité est définie par une densité $\mathcal{I}(X)$: l'intensité lumineuse émise par un élément de longueur de la source, centré en X et de longueur $\mathrm{d}X$, est $\mathcal{I}(X)\,\mathrm{d}X$. Décrire la figure d'interférence observée sur l'écran. En déduire le théorème de Van Cittert – Zernike qui relie le contraste des interférences au profil $\mathcal{I}(X)$ de la source.

Exercice IV Interféromètre de Michelson

1. *Question préliminaire : lame à faces parallèles*

   Une source S_0 illumine un système de deux lames de verre, parallèles entre elles, distantes de h, et d'épaisseur négligeable devant h. On cherche à calculer l'intensité lumineuse sur un écran situé du même côté de la première lame que S_0 (Fig. 4.1) et parallèle à cette lame. On néglige ici les réflexions multiples sur les lames de verre.

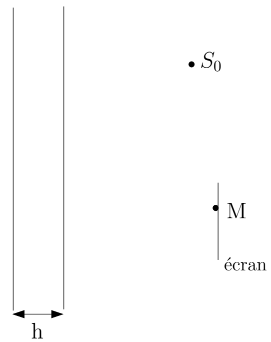

Figure 4.1 – Lame à faces parallèlles

1.1 La source au point S_0 est supposée ponctuelle. En faisant une analogie avec l'exercice précédent, établissez, sans calculs, la forme de la figure d'interférence observée sur l'écran.

1.2 Que se passe-t-il dans le cas d'une source étendue ?

1.3 On remplace maintenant la bi-lame par une lame épaisse d'épaisseur e et d'indice n. On néglige toujours les réflexions multiples dans la lame. Calculer la différence de marche entre les deux rayons réfléchis par la lame, issus d'un rayon incident qui fait un angle i avec la normale à la lame.

Clément Sayrin
clement.sayrin@lkb.ens.fr

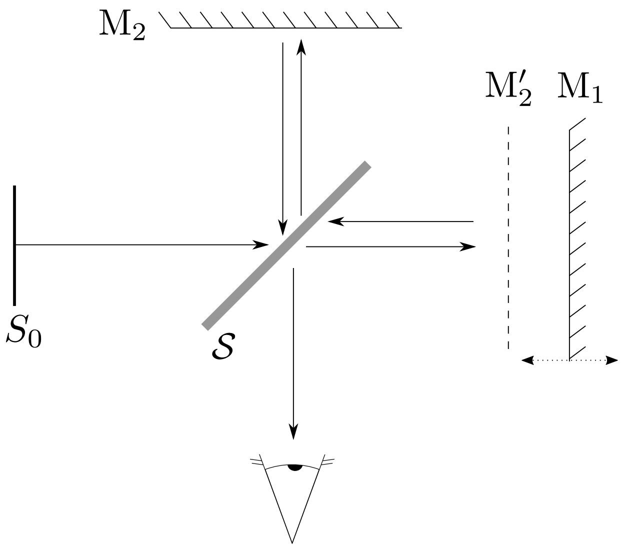

FIGURE 4.2 – Interféromètre de Michelson en lame d'air.

2. **Anneaux d'égale inclinaison**

Un interféromètre de Michelson (FIG. 4.2) est constitué de deux bras, 1 et 2, perpendiculaires, portant chacun un miroir plan M_i ($i = 1, 2$) parfaitement réfléchissant. L'amplitude lumineuse, issue d'une source étendue S_0, est divisée équitablement entre les deux bras par une lame séparatrice $\mathcal{S}$, semi-réfléchissante, qui les recompose aussi en sortie. Le miroir M_1 est placé sur un support mobile qui permet de le déplacer selon la normale au miroir.

On note M'_2 le symétrique de M_2 par rapport à $\mathcal{S}$. On suppose ici que M_1 et M'_2 sont parallèles. L'ensemble $\{M_1, M'_2\}$ forme alors l'équivalent d'une lame d'air.

2.1 *Lumière monochromatique*

La source S_0 est monochromatique, de longueur d'onde λ_0.

a. Quelle est la différence de marche entre deux rayons en sortie de l'interféromètre, issus d'un même rayon provenant de S_0, en fonction de l'angle d'incidence θ de ces rayons sur les miroirs et de l'épaisseur e de l'interféromètre de Michelson, *i.e.* la distance séparant M_1 et M'_2 ?

b. Pourquoi peut-on dire que les franges sont localisées ? Où le sont-elles ? Comment les observer ?

c. Décrire la figure d'interférence. Comment faut-il éclairer l'interféromètre pour observer la figure d'interférence ?

d. Calculer le rayon des anneaux brillants, en supposant que le centre de la figure est brillant.

e. Qu'observe-t-on si $e = 0$? Qu'observe-t-on si l'on «chariotte», *i.e.* que l'on déplace le miroir M_1 le long de sa normale ?

f. Pourquoi préférer un interféromètre de Michelson à un dispositif à trous d'Young ?

2.2 *Lumière polychromatique*

a. La source S_0 est maintenant polychromatique. Expliquer qualitativement ce qui se passe.

b. On suppose que la source émet seulement à deux longueurs d'ondes λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$. Il peut s'agir, par exemple, du doublet jaune du mercure, avec $\lambda_1 = 576,9\,\text{nm}$ et $\lambda_2 = 579,1\,\text{nm}$, ou du doublet jaune du sodium, avec $\lambda_1 = 589,00\,\text{nm}$ et $\lambda_2 = 589,59\,\text{nm}$.
Calculer, en fonction de e, l'éclairement au centre de la figure d'interférence, en supposant que les deux composantes spectrales sont égales en intensité.

c. En déduire une manière de résoudre le doublet.

3. **Franges d'égale épaisseur**

On introduit un petit angle α entre les deux miroirs. Comment est modifiée la figure d'interférence ? Où les interférences sont-elles localisées ? Comment doit-on procéder pour les observer. On discutera en particulier la cas de la lumière blanche.

Clément Sayrin
clement.sayrin@lkb.ens.fr

Exercice V Interféromètre de Fabry-Pérot

L'interféromètre de Fabry-Pérot est constitué de deux lames planes parallèles, argentées sur les faces en regard, et distantes de e. On note r et t leurs coefficients de réflexion et transmission en amplitude, a priori complexes, et $R = |r|^2 \sim 1$ et $T = |t|^2 \ll 1$ leurs coefficients de réflexion et transmission en intensité.

1. **Lumière monochromatique**

   On éclaire l'interféromètre selon une incidence variable, en lumière monochromatique (longueur d'onde λ_0).

   1.1 Calculer l'intensité I transmise dans la direction i, en fonction de l'intensité incidente I_0, de R, et du déphasage φ accumulé entre deux réflexions sur une même lame, que l'on calculera.

   Représenter la fonction $I(\varphi)$. Comparer au cas d'un interféromètre à deux ondes.

   1.2 Déterminer la finesse $\mathcal{F}$ du Fabry-Pérot, définie comme le rapport de l'écart $\Delta\varphi$ entre deux résonances et de la largeur à mi-hauteur $\delta\varphi$ d'un pic de résonance :

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi}.$$

   1.3 Calculer le rayon i_k du $k^{\text{ième}}$anneau brillant, en supposant le centre brillant.
   A.N. : $R = 0,985$, $e = 6\,\text{mm}$, $\lambda = 0,6\,\mu\text{m}$.

2. **Lumière polychromatique**

   On cherche maintenant à utiliser le Fabry-Pérot comme spectromètre, *i.e.* comme outil permettant de séparer différentes longueurs d'ondes.

   2.1 On mesure l'éclairement dans une direction i donnée. Calculer l'intervalle spectral libre $\Delta\nu_{\text{ISL}}$, *i.e.* l'intervalle entre deux fréquences successives pour lesquelles on a une frange brillante dans la direction i.

   Une variation $\delta\nu$ de la fréquence de la source induit dans la direction i une variation de l'éclairement. Exprimer la plus petite variation $\delta\nu$ distinguable avec le Fabry-Pérot, en fonction de $\Delta\nu_{\text{ISL}}$ et de la finesse $\mathcal{F}$.

   2.2 Calculer, dans les mêmes conditions, la variation relative minimale de longueur d'onde que l'on peut distinguer avec le Fabry-Pérot.

   2.3 On suppose maintenant que la source est polychromatique et émet deux longueurs d'onde, λ et $\lambda + \Delta\lambda$. Qu'observe-t-on ? Pour quel intervalle $\Delta\lambda$ distingue-t-on les anneaux ?

Exercice VI Agregation 2005, épreuve A (première partie)

Cf. BUP et `http://www.agregation-physique.org`.