LU3PY101
Physique Quantique 1
2023-2024

TD 9 - Spin 1/2 – Corrigé –

1 Projections du spin 1/2 et changement de base

Cet exercice vise à bien maîtriser l'écriture matricielle des composantes du spin dans n'importe quelle base.

1. Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire de l'espace repéré par les angles θ et φ. Écrire l'opérateur $\widehat{S}_u$ associé à la composante $\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{u}$ du spin. Donner sa représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}_z$.

Solution:

$$\widehat{S}_u = \sin\theta\cos\varphi\widehat{S}_x + \sin\theta\sin\varphi\widehat{S}_y + \cos\theta\widehat{S}_z$$

En utilisant la représentation des opérateurs $\widehat{S}_x, \widehat{S}_y, \widehat{S}_z$ en fonction des matrices de Pauli dans la base $\mathcal{B}_z$ (cf. cours), on obtient

$$(S_u)_{\mathcal{B}_z} = \frac{\hbar}{2}\left[\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right],$$

d'où

$$(S_u)_{\mathcal{B}_z} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

2. Valeurs propres et vecteurs propres
   (a) Justifier par isotropie de l'espace, les valeurs propres $\lambda_\pm$ de $\widehat{S}_u$.

   Solution: Tous les axes jouent un rôle équivalent dans l'espace physique. Les résultats de mesure seront identiques quelle que soit la composante de spin $\widehat{S}_u$ mesurée. Les valeurs propres de toute composante $\widehat{S}_u$ seront donc $\lambda_\pm = \pm\hbar/2$, comme on peut le vérifier par un calcul direct.

   (b) Obtenir alors les vecteurs propres normés à l'unité qui seront notés $|\pm\rangle_{\mathrm{u}}$.

   Solution: Calculons les vecteurs propres :
   — valeur propre $\lambda_+ = +\hbar/2$:
   On a le système de deux équations

$$\begin{cases} \cos\theta x + e^{-i\varphi}\sin\theta y = x \\ e^{i\varphi}\sin\theta x - \cos\theta y = y \end{cases}$$

Les deux équations sont équivalentes. A partir de la deuxième ligne, en utilisant le fait que $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ et $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ on peut écrire

$$\cos\frac{\theta}{2}y = e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}x$$

On peut alors choisir $y = e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}$ et $x = \cos\frac{\theta}{2}$, ce qui donne un vecteur normé à l'unité

$$|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle_z + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|-\rangle_z.$$

— valeur propre $\lambda_- = -\hbar/2$:

On trouve de même

$$|-\rangle_u = \sin\frac{\theta}{2}|+\rangle_z - e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}|-\rangle_z.$$

(c) En déduire les vecteurs propres de $\widehat{S}_x$ et ceux de $\widehat{S}_y$. Montrer que pour $\widehat{S}_y$, on peut choisir comme vecteurs propres $|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle_z \pm i|-\rangle_z]$. La base construite à partir de ces vecteurs propres est normée et sera notée $\mathcal{B}_y$.

Solution: Les opérateurs $\widehat{S}_x$ et $\widehat{S}_y$ correspondent respectivement à ($\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$) et ($\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$). On obtient

$$\widehat{S}_x \Rightarrow \begin{cases} |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z) \\ |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z - |-\rangle_z) \end{cases}$$

et

$$\widehat{S}_y \Rightarrow \begin{cases} |+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + i|-\rangle_z) \\ |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z - i|-\rangle_z) \end{cases}$$

Désormais on va choisir de travailler dans cette nouvelle base $\mathcal{B}_y$. On veut écrire la matrice $(S_z)_{\mathcal{B}_y}$ qui représente l'opérateur $\widehat{S}_z$ dans cette nouvelle base. On va utiliser deux méthodes différentes.

3. *Première méthode* : partir de l'action de l'opérateur $\widehat{S}_z$ sur les vecteurs propres de $\widehat{S}_y$ formant la base $\mathcal{B}_y$.

Solution: On applique l'opérateur $\widehat{S}_z$ sur les vecteurs propres $|+\rangle_y$ et $|-\rangle_y$, et on obtient

$$\widehat{S}_z|+\rangle_y = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}(|+\rangle_z - i|-\rangle_z) = \frac{\hbar}{2}|-\rangle_y$$

et

$$\widehat{S}_z|-\rangle_y = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle_z + i|-\rangle_z\right) = \frac{\hbar}{2}|+\rangle_y$$

et on retrouve bien la même expression pour la matrice $(S_z)_{\mathcal{B}_y}$.

4. *Seconde méthode (bonus)* : à partir de la matrice de changement de base notée T. Écrire cette matrice. En déduire la matrice adjointe $T^\dagger$. Vérifier que la matrice de changement de base est bien unitaire.

Solution:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

On calcule alors la matrice adjointe $T^\dagger$:

$$T^\dagger =^t (T^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

On peut calculer la matrice inverse T^{-1}. On calcule l'inverse d'une matrice 2×2 après s'être assuré que le déterminant de celle-ci est non nul soit $ad - bc \neq 0$. Puis on applique la méthode :

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$T^{-1} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

On vérifie l'unitarité car $T^\dagger = T^{-1}$

On retrouve l'expression de la représentation de l'opérateur $\widehat{S}_z$ dans la base $\mathbf{B}_y$ établie à la question précédente :

$$\begin{aligned}(S_z)_{\mathcal{B}_y} = \left[T^\dagger (S_z)_{\mathcal{B}_z} T\right] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2 Dynamique du spin 1/2

On considère une particule de charge électrique nulle et de spin 1/2 soumise à un champ magnétique statique B_0 suivant la direction $\vec{u}_z$. On note γ le rapport gyromagnétique.

5. Quelle relation lie le moment magnétique $\widehat{\overrightarrow{\mathcal{M}}}$ et le spin $\widehat{\overrightarrow{S}}$ de la particule ?

Solution: Ils ont proportionnels, le coefficient de proportionnalité étant le rapport gyromagnétique : $\hat{\overrightarrow{\mathcal{M}}} = \gamma \hat{\overrightarrow{S}}$.

On introduit la fréquence angulaire $\omega_L = -\gamma B_0$.

6. Exprimer l'hamiltonien d'interaction $\widehat{H}$ entre la particule et le champ magnétique, en fonction des composantes du spin. Quelles sont les valeurs propres et les états propres de cet hamiltonien ?

Solution: $\widehat{H} = -\hat{\overrightarrow{\mathcal{M}}} \cdot \vec{B} = -\gamma \hat{\overrightarrow{S}} \cdot \vec{B} = -\gamma B_0 \widehat{S}_z$.
Les énergies propres sont les $\pm\hbar\omega_L/2$ associées aux états propres $|\pm\rangle_z$.

On suppose qu'à l'instant initial, l'électron est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |+\rangle_u$

7. Que vaut $|\psi(t)\rangle$?

Solution: Dans la première partie, on a obtenu l'expression de $|\psi(0)\rangle$ développé sur les états stationnaires : $|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle_z$. On obtient donc

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\omega_L t/2}|+\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2}e^{i(\varphi+\omega_L t/2)}|-\rangle_z$$

8. Déterminer $\langle\widehat{S}_x\rangle(t)$, $\langle\widehat{S}_y\rangle(t)$, et $\langle\widehat{S}_z\rangle(t)$, le système étant préparé dans l'état $|\psi(t)\rangle$. Comparer l'évolution de ces valeurs moyenne avec l'évolution d'un moment magnétique classique.

Solution: On trouve

$$\langle\widehat{S}_x\rangle(t) = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos(\varphi+\omega_L t)$$
$$\langle\widehat{S}_y\rangle(t) = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin(\varphi+\omega_L t)$$
$$\langle\widehat{S}_z\rangle(t) = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$$

C'est le mouvement de précession classique. Il s'agit ici d'une précession du spin dans l'espace réel, autour de la direction du champ magnétique, à la fréquence ω_L.

9. Quel est l'état quantique du système après un tour du spin autour du champ magnétique ?

Solution: D'après la question précédente, le spin effectue un tour autour du champ magnétique en $T = 2\pi/\omega_L$. On a donc

$$|\psi(T)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\pi}\,|+\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2}e^{i(\varphi+\pi)}\,|-\rangle_z = -\,|\psi(0)\rangle\,.$$

Le système est revenu dans son état quantique initial à la phase globale π près. Autrement dit, le vecteur d'état précesse dans la sphère de Bloch à une fréquence 2 fois plus faible que le spin autour du champ magnétique dans l'espace réel.