

TD 9 - SPIN 1/2

1 Projections du spin 1/2 et changement de base

Cet exercice vise à bien maîtriser l'écriture matricielle des composantes du spin dans n'importe quelle base.

1. Soit \vec{u} le vecteur unitaire de l'espace repéré par les angles θ et φ . Écrire l'opérateur \hat{S}_u associé à la composante $\vec{S} \cdot \vec{u}$ du spin. Donner sa représentation matricielle dans la base \mathcal{B}_z .
2. Valeurs propres et vecteurs propres
 - (a) Justifier par isotropie de l'espace, les valeurs propres λ_{\pm} de \hat{S}_u .
 - (b) Obtenir alors les vecteurs propres normés à l'unité qui seront notés $|\pm\rangle_u$.
 - (c) En déduire les vecteurs propres de \hat{S}_x et ceux de \hat{S}_y . Montrer que pour \hat{S}_y , on peut choisir comme vecteurs propres $|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle_z \pm i|-\rangle_z]$. La base construite à partir de ces vecteurs propres est normée et sera notée \mathcal{B}_y .

Désormais on va choisir de travailler dans cette nouvelle base \mathcal{B}_y . On veut écrire la matrice $(S_z)_{\mathcal{B}_y}$ qui représente l'opérateur \hat{S}_z dans cette nouvelle base. On va utiliser deux méthodes différentes.

3. *Première méthode* : partir de l'action de l'opérateur \hat{S}_z sur les vecteurs propres de \hat{S}_y formant la base \mathcal{B}_y .
4. *Seconde méthode (bonus)* : à partir de la matrice de changement de base notée T . Écrire cette matrice. En déduire la matrice adjointe T^\dagger . Vérifier que la matrice de changement de base est bien unitaire.

2 Dynamique du spin 1/2

On considère une particule de charge électrique nulle et de spin 1/2 soumise à un champ magnétique statique B_0 suivant la direction \vec{u}_z . On note γ le rapport gyromagnétique.

5. Quelle relation lie le moment magnétique $\widehat{\mathcal{M}}$ et le spin \widehat{S} de la particule ?
On introduit la fréquence angulaire $\omega_L = -\gamma B_0$.
6. Exprimer l'hamiltonien d'interaction \hat{H} entre la particule et le champ magnétique, en fonction des composantes du spin. Quelles sont les valeurs propres et les états propres de cet hamiltonien ?

On suppose qu'à l'instant initial, l'électron est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |+\rangle_u$

7. Que vaut $|\psi(t)\rangle$?
8. Déterminer $\langle \hat{S}_x \rangle(t)$, $\langle \hat{S}_y \rangle(t)$, et $\langle \hat{S}_z \rangle(t)$, le système étant préparé dans l'état $|\psi(t)\rangle$. Comparer l'évolution de ces valeurs moyennes avec l'évolution d'un moment magnétique classique.
9. Quel est l'état quantique du système après un tour du spin autour du champ magnétique ?