

## TD 8 - SYSTÈME À DEUX ÉTATS

### 1 Tomographie de l'état d'une molécule d'ammoniac

Dans cet exercice nous allons voir comment on peut caractériser complètement l'état d'un système à deux niveaux d'énergie en effectuant une succession de mesures projectives. On rappelle que l'état  $|\psi\rangle$  de la molécule peut toujours se ramener à la donnée de deux nombres réels  $\phi$  et  $\theta$  tels que

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\psi_S\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\psi_A\rangle, \quad \text{où} \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \text{et} \quad -\pi < \phi \leq \pi.$$

On considère une molécule d'ammoniac préparée dans une superposition de ses deux états stationnaires  $|\psi_S\rangle$  et  $|\psi_A\rangle$ , d'énergies respectives  $-\hbar\omega_0/2$  et  $\hbar\omega_0/2$ .

On prépare  $N \gg 1$  molécules chacune dans le même état  $|\psi\rangle$  (les coefficients  $\phi$  et  $\theta$  sont inconnus mais identiques pour chacune des molécules). Sur chaque molécule, on effectue une mesure de l'énergie.

1. Quels sont les résultats possibles pour une mesure individuelle ? Donner les probabilités correspondantes.
2. Quelle est la valeur moyenne des résultats obtenus sur l'assemblée des  $N$  molécules ? Les coefficients  $\phi$  et  $\theta$  sont-ils complètement déterminés après ces mesures ?

On prépare à nouveau  $N$  molécules dans le même état  $|\psi\rangle$  et on mesure leur moment dipolaire électrique. On rappelle que l'observable moment dipolaire  $\hat{d}$  a pour états propres

$$|\psi_G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_S\rangle + |\psi_A\rangle) \quad \text{et} \quad |\psi_D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_S\rangle - |\psi_A\rangle),$$

associés respectivement aux valeurs propres  $+d_0$  et  $-d_0$ .

3. Quels sont les résultats possibles pour une mesure individuelle ? Donner les probabilités correspondantes.
4. Quelle est la valeur moyenne des résultats obtenus sur l'assemblée des  $N$  molécules ? Que connaissons-nous à ce niveau des coefficients  $\phi$  et  $\theta$  après les  $N$  mesures de la question 2 et les  $N$  mesures de cette question ?

Pour lever toute ambiguïté restante sur la détermination de  $\phi$  et  $\theta$ , on propose le protocole expérimental suivant : on prépare  $N$  molécules à  $t = 0$  dans l'état  $|\psi\rangle$ . On les laisse évoluer pendant une durée  $T$  puis on procède de nouveau à une mesure du moment dipolaire sur chacune des molécules.

5. Écrire l'état  $|\psi(t = T)\rangle$  de ces molécules juste avant la mesure.

- Donner la valeur moyenne des résultats obtenus sur l'assemblée des  $N$  molécules en fonction de  $T$ .

On choisit de faire ce troisième ensemble de mesures à  $T = \frac{\pi}{2\omega_0}$ .

- Montrer que l'état initialement inconnu à  $t = 0$  est complètement déterminé si on combine les résultats des trois groupes de mesure.

### Représentation dans la sphère de Bloch

Les angles  $\theta$  et  $\phi$  utilisés pour décrire l'état de la molécule d'ammoniac peuvent être utilisés pour représenter graphiquement l'état du système. On représente un ket  $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\psi_S\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\psi_A\rangle$  par un point de coordonnées sphériques  $(\theta, \phi)$  sur une sphère de rayon unité, appelée *sphère de Bloch*.

- Représenter sur la sphère de Bloch les états  $|\psi_S\rangle$ ,  $|\psi_A\rangle$ ,  $|\psi_G\rangle$  et  $|\psi_D\rangle$ .
- À quoi correspond, graphiquement, la valeur moyenne de l'énergie? De même pour la valeur moyenne de l'opérateur moment dipolaire. Retrouver alors le fait que la mesure de l'énergie ne donne pas d'information sur la phase  $\phi$  de la superposition.
- Quelle est la trajectoire sur la sphère de Bloch de l'état  $|\psi(t)\rangle$ ? Où se situe l'état du système sur la sphère à  $t = 0$  et à  $T = \pi/(2\omega_0)$ ? Retrouver alors graphiquement le fait que, si la mesure du moment dipolaire à  $t = 0$  permet de mesurer  $\cos\phi$ , la même mesure à  $t = T$  permet de mesurer  $\sin\phi$ .