LU3PY101
Physique Quantique 1
2023-2024

TD 7 - États quasi-classiques de l'oscillateur harmonique quantique 1D – Corrigé –

Une particule de masse m est soumise au potentiel harmonique $\widehat{V}(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$. On introduit les opérateurs adimensionnés $\widehat{X} = \hat{x}/x_0$ et $\widehat{P} = \hat{p}/p_0$, où $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$ et $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$. On rappelle que les opérateurs de création et d'annihilation sont définis par

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\widehat{X} + i\widehat{P}\right], \text{ et } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\widehat{X} - i\widehat{P}\right]. \tag{1}$$

1. Quels sont les états stationnaires de l'oscillateur harmonique quantique unidimensionnel ?

Solution: Ce sont les états propres de l'hamiltonien, que l'on nomme *états nombres* et que l'on note $|n\rangle$, où n est un entier positif. La valeur propre associée est l'énergie $E_n = \hbar\omega\,(n + 1/2)$. Rappelons qu'un état propre de l'hamiltonien est stationnaire : si l'on résout l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\,|\Psi\rangle}{\partial t} = \widehat{H}\,|\Psi\rangle\,,$$

où $|\Psi\rangle$ est un état nombre qui vérifie $\widehat{H}\,|\Psi\rangle = E_n\,|\Psi\rangle$, on a

$$i\hbar\frac{\partial\,|\Psi\rangle}{\partial t} = E_n\,|\Psi\rangle\,,$$

soit $|\Psi(t)\rangle = |\Psi(0)\rangle\, e^{-iE_nt/\hbar}$. La partie temporelle est un terme de phase (exponentielle complexe avec phase dépendant du temps), dont le module vaut 1 : les valeurs moyennes de toute grandeurs physique dans cet état et les probabilités ne dépendent pas du temps.

2. Calculer la valeur moyenne des opérateurs position et impulsion pour un oscillateur préparé dans une état nombre.

Solution: Il faut calculer $\langle n|\widehat{X}|n\rangle$, or on ne connait pas l'action de $\widehat{X}$ sur un état nombre. Les seuls opérateurs que l'on sait faire agir sur les états nombres sont les opérateurs d'annihilation et de création : $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ et $\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ (relations à connaître). Or on peut exprimer $\widehat{X}$ en fonction de $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ en inversant le système d'équations 1. On obtient

$$\langle n|\widehat{X}|n\rangle = \langle n|\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n}\,\langle n|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,\langle n|n+1\rangle\right).$$

Comme l'ensemble des états nombre forme une base orthonormée de l'espace des états, pour deux entiers n et n' différents on a $\langle n|n'\rangle = 0$. On en déduit que $\langle n|\widehat{X}|n\rangle = 0$. Un calcul similaire pour l'impulsion montre que $\langle n|\widehat{P}|n\rangle = 0$.

3. Quelle évolution temporelle de la position $X(t)$ et de l'impulsion $P(t)$ attend-on pour un oscillateur harmonique classique ? Conclure.

Solution: Pour un oscillateur harmonique classique, en résolvant les équations du mouvement (prérequis), on obtient

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$
$$P(t) = P_0 \sin(\omega t + \phi_0).$$

La position et l'impulsion oscillent à ω en quadrature de phase. Le comportement des états nombres est donc très éloigné du comportement classique. En effet, à la question précédente, nous avons trouvé que lorsque le système quantique est dans un état nombre, la position et l'impulsion sont nulles en valeurs moyennes.

Dans ce qui suit nous allons chercher s'il existe des états de l'oscillateur harmonique pour lesquels le système se comporte de la manière la plus proche possible d'un oscillateur harmonique classique, c'est-à-dire des états *quasi-classiques*. Nous allons donc chercher des états $|\Psi(t)\rangle$ du système tels qu'en valeur moyenne le système suive la trajectoire classique :

$$\langle\Psi(t)|\widehat{X}|\Psi(t)\rangle = X(t) = \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{2}$$
$$\langle\Psi(t)|\widehat{P}|\Psi(t)\rangle = P(t) = -\sin(\omega t + \varphi_0). \tag{3}$$

4. Une première idée est de choisir des états qui sont simultanément états propres de $\widehat{X}$ et $\widehat{P}$. De tels états existent-ils ?

Solution: De tels états ne peuvent pas exister, car les inégalités d'Heisenberg seraient violées. En effet, dans un tel état, la position et l'impulsion du système seraient parfaitement bien définies, bien déterminée, or ces deux observables ne commutent pas, donc c'est impossible.

5. Quelle est l'expression de la trajectoire (nombre complexe $\alpha(t)$) dans l'espace des phases de l'oscillateur harmonique classique ? Quelle courbe parcourt $\alpha(t)$ au cours d'une période du mouvement ?

Solution: Dans le plan complexe (X, P), la trajectoire du système classique est $\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X(t) + iP(t))$ (en utilisant des variables adimensionnées, cf. cours). La trajectoire classique est un cercle, car $X(t)^2 + Y(t)^2$ est proportionnel à l'énergie totale qui est constante. Notez qu'avec des variables dimensionnées, la trajectoire serait une ellipse.

6. Mettre en regard l'expression de α déterminée à la question précédente, et le système d'équations 1. Quel a été le processus de quantification ? Autrement dit, quelle transformation a-t-on effectuée pour passer du problème classique au problème quantique ? Donner une interprétation physique de $\hat{a}$.

Solution: α et l'opérateur d'annihilation $\hat{a}$ ont la même expression. Pour passer de α à $\hat{a}$ il faut simplement ajouter des chapeaux sur X et P. Le processus de quantification a donc consisté à transformer en opérateur la trajectoire dans l'espace des phases de l'oscillateur harmonique classique. L'opérateur d'annihilation est l'analogue quantique de la trajectoire classique du système classique dans l'espace des phases.

Supposons que l'on ait a disposition un état $|\varphi\rangle$, qui soit un état propre de $\hat{a}$ associé à la valeur propre φ. On aurait donc $\hat{a}\,|\varphi\rangle = \varphi\,|\varphi\rangle$. Comme $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\widehat{X} + i\widehat{P}\right]$, on voit que dans l'hypothèse où $|\varphi\rangle$ serait simultanément propre de $\widehat{X}$ et $\widehat{P}$, on aurait

$$\hat{a}\,|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{X} + i\widehat{P}\right)|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X + iP\right)|\varphi\rangle = \alpha\,|\varphi\rangle\,. \tag{4}$$

On pourrait donc identifier φ à α, et renommer $|\varphi\rangle$ en $|\alpha\rangle$. Or, on remarque que rien n'interdit que l'équation 4 soit vérifiée dans le cas où $|\varphi\rangle$ n'est pas simultanément propre de $\widehat{X}$ et $\widehat{P}$. On a l'intuition que, dans ce cas, $|\varphi\rangle$ est proche d'être simultanément état propre (sans l'être rigoureusement) de $\widehat{X}$ et $\widehat{P}$ et donc qu'un tel état $|\varphi\rangle$ pourrait satisfaire les équation 2 et 3.

Supposons l'existence d'un état $|\alpha\rangle$, de norme unité, et état propre de $\hat{a}$, c'est-à-dire tel que $\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$.

7. Calculer les valeurs moyennes de $\widehat{X}$ et $\widehat{P}$, pour un système préparé dans l'état $|\alpha\rangle$, normé à l'unité. Conclure.

Solution: On a

$$\langle\alpha|\widehat{X}|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\langle\alpha|\hat{a} + \hat{a}^\dagger|\alpha\rangle\,.$$

Nous savons faire agir $\hat{a}$ sur les *ket*, à droite, car par hypothèse, $\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$. Mais nous ne savons pas faire agir $\hat{a}^\dagger$ à droite. Par contre si l'on prend l'hermitique conjugué de $\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$, on obtient $\langle\alpha|\,\hat{a}^\dagger = \alpha^*\,\langle\alpha|$, donc on sait faire agir $\hat{a}^\dagger$ à gauche, sur les *bra*. Nous avons donc tout ce qu'il faut pour effectuer le calcul :

$$\langle\alpha|\widehat{X}|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\,\langle\alpha|\alpha\rangle + \alpha^*\,\langle\alpha|\alpha\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha + \alpha^*\right),$$

on l'on a utilisé le fait que les état $|\alpha\rangle$ sont de norme unité. On en déduit que

$$\langle\alpha|\widehat{X}|\alpha\rangle = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\alpha) = X,$$

la position de l'oscillateur harmonique classique.
De même, on trouve

$$\langle\alpha|\widehat{P}|\alpha\rangle = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}(\alpha) = P,$$

l'impulsion de l'oscillateur harmonique classique.

Le système préparé dans l'état $|\alpha\rangle$ suit donc bien la trajectoire classique en valeur moyenne.

Nous n'allons cependant pas nous satisfaire de cette propriété. En effet, on attend d'un état *quasi-classique* qu'il produise un écart-type de la position et un écart-type de l'impulsion simultanément minimaux.

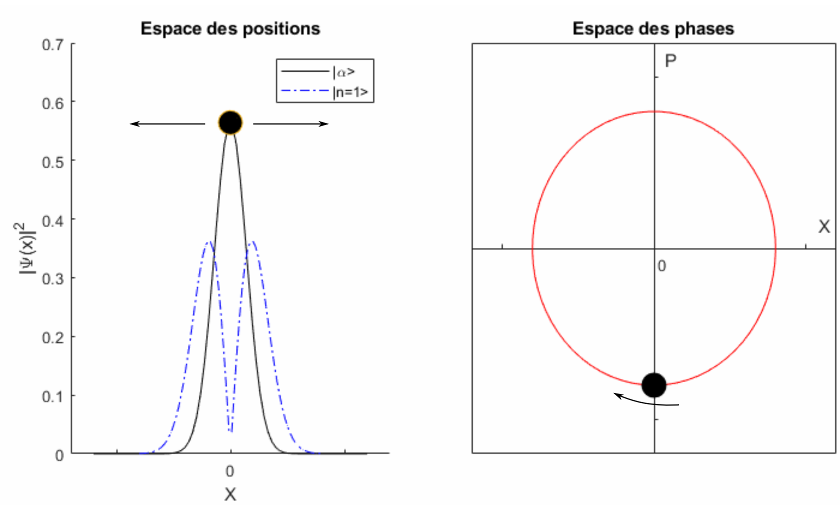
8. Calculer l'écart type de la position et de l'impulsion lorsque le système est préparé dans l'état $|\alpha\rangle$. Conclure.

Solution: En utilisant le résultat de la question précédente ainsi que la relation de commutation $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \hat{\mathbb{1}}$ (à connaître), on trouve

$$\begin{aligned}\Delta\widehat{X}^2 = \langle\alpha|\widehat{X}^2|\alpha\rangle - \overbrace{\langle\alpha|\widehat{X}|\alpha\rangle^2}^{X^2} &= \frac{1}{2}\langle\alpha|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2|\alpha\rangle - X^2 \\ &= \frac{1}{2}\langle\alpha|(\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \overbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger}^{\hat{\mathbb{1}}+\hat{a}^\dagger\hat{a}} + \hat{a}^2|\alpha\rangle - X^2 \\ &= \frac{1}{2}\langle\alpha|(\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2 + 1 + \alpha^2|\alpha\rangle - X^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc $\Delta\widehat{X} = 1/\sqrt{2}$ De même, on trouve $\Delta\widehat{P} = 1/\sqrt{2}$. On a donc $\Delta\widehat{X}\Delta\widehat{P} = 1/2$, cas limite d'égalité des inégalités de Heisenberg. L'indétermination est équitablement répartie entre position et impulsion. Le produit des indéterminations est minimal.

9. On peut montrer que la fonction d'onde associée à un état quasi-classique est une fonction gaussienne. Représenter à différents instants la densité de probabilité associée en fonction de la position. Décrire l'évolution temporelle du module carré de la fonction d'onde associée à un état nombre. Représenter schématiquement l'évolution dans l'espace des phases d'un oscillateur harmonique quantique préparé dans un état quasi-classique.

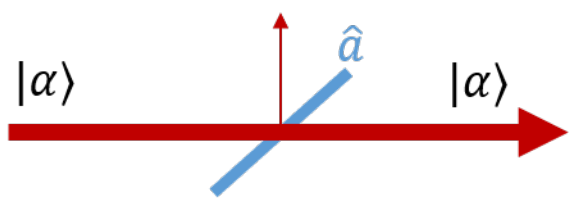


Solution:
La valeur moyenne de la gaussienne (qui coïncide avec son maximum) oscille de gauche à droite à la fréquence angulaire ω. Au cours de cette évolution, la gaussienne ne se déforme pas, et conserve un écart-type de $1/\sqrt{2}$. Un état nombre est stationnaire, donc la densité

de probabilité est fixe dans le temps : la courbe bleue tiretée représente la fonction d'onde associée à l'état $|1\rangle$ (à ce stade vous ne devez pas savoir tracer cette fonction d'onde, elle est donnée pour illustrer). Dans l'espace des phases, le système suit la trajectoire classique en moyenne. On peut symboliser l'indétermination de la position et l'impulsion par le disque noir.

10. Quelle est la signification physique de l'équation $\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$?

Solution: Cette relation signifie que si l'on annihile un quantum de vibration à un OH dans un état quasi-classique, l'état obtenu est toujours un état quasi-classique. On dit (jargon) que les états quasi-classiques sont *robustes aux pertes*. En optique quantique, l'absorption d'un photon correspond à l'action de $\hat{a}$, que l'on peut modéliser par une lame semi-réfléchissante qui retire un photon au faisceau incident. Si l'état du champ en entrée de la lame est un état quasi-classique, il reste quasi-classique en sortie. Les autres types d'états sont, à l'inverse, modifiés par la présence de pertes. Dans les expériences, c'est l'une des choses qui rend les états quantiques (non quasi-classiques) difficiles à manipuler, mais heureusement il existe des techniques puissantes pour contourner l'effet des pertes.



11. L'état fondamental de l'oscillateur harmonique est-il un état nombre ou un état quasi-classique ?

Solution: L'état $|0\rangle$ est à la fois un état quasi-classique et un état nombre, puisqu'il vérifie $\hat{a}\,|0\rangle = 0\,|0\rangle$ et $\widehat{N}\,|0\rangle = 0\,|0\rangle$. En cela, il n'est « pas très quantique », contrairement aux états nombre à n supérieur.

Remarques : les états quasi-classiques sont également appelés *états cohérents* car il ont été introduits pour décrire l'état du champ électromagnétique créé par un laser (source cohérente de lumière). Roy Glauber a obtenu le prix Nobel pour cela en 2005. Il sont également appelés *états gaussiens*, puisque la fonction d'onde représentant ces états est gaussienne.