TD 7 - États quasi-classiques de l'oscillateur harmonique quantique 1D

Une particule de masse m est soumise au potentiel harmonique $\widehat{V}(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$. On introduit les opérateurs adimensionnés $\widehat{X} = \hat{x}/x_0$ et $\widehat{P} = \hat{p}/p_0$, où $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$ et $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$. On rappelle que les opérateurs de création et d'annihilation sont définis par

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\widehat{X} + i\widehat{P}\right], \text{ et } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\widehat{X} - i\widehat{P}\right]. \tag{1}$$

1. Quels sont les états stationnaires de l'oscillateur harmonique quantique unidimensionnel ?
2. Calculer la valeur moyenne des opérateurs position et impulsion pour un oscillateur préparé dans une état nombre.
3. Quelle évolution temporelle de la position $X(t)$ et de l'impulsion $P(t)$ attend-on pour un oscillateur harmonique classique ? Conclure.

Dans ce qui suit nous allons chercher s'il existe des états de l'oscillateur harmonique pour lesquels le système se comporte de la manière la plus proche possible d'un oscillateur harmonique classique, c'est-à-dire des états *quasi-classiques*. Nous allons donc chercher des états $|\Psi(t)\rangle$ du système tels qu'en valeur moyenne le système suive la trajectoire classique :

$$\langle\Psi(t)|\widehat{X}|\Psi(t)\rangle = X(t) = \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{2}$$

$$\langle\Psi(t)|\widehat{P}|\Psi(t)\rangle = P(t) = -\sin(\omega t + \varphi_0). \tag{3}$$

4. Une première idée est de choisir des états qui sont simultanément états propres de $\widehat{X}$ et $\widehat{P}$. De tels états existent-ils ?
5. Quelle est l'expression de la trajectoire (nombre complexe $\alpha(t)$) dans l'espace des phases de l'oscillateur harmonique classique ? Quelle courbe parcourt $\alpha(t)$ au cours d'une période du mouvement ?
6. Mettre en regard l'expression de α déterminée à la question précédente, et le système d'équations 1. Quel a été le processus de quantification ? Autrement dit, quelle transformation a-t-on effectuée pour passer du problème classique au problème quantique ? Donner une interprétation physique de $\hat{a}$.

Supposons que l'on ait a disposition un état $|\varphi\rangle$, qui soit un état propre de $\hat{a}$ associé à la valeur propre φ. On aurait donc $\hat{a}\,|\varphi\rangle = \varphi\,|\varphi\rangle$. Comme $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\widehat{X} + i\widehat{P}\right]$, on voit que dans l'hypothèse où $|\varphi\rangle$ serait simultanément propre de $\widehat{X}$ et $\widehat{P}$, on aurait

$$\hat{a}\,|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{X} + i\widehat{P}\right)|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X + iP\right)|\varphi\rangle = \alpha\,|\varphi\rangle\,. \tag{4}$$

On pourrait donc identifier φ à α, et renommer $|\varphi\rangle$ en $|\alpha\rangle$. Or, on remarque que rien n'interdit que l'équation 4 soit vérifiée dans le cas où $|\varphi\rangle$ n'est pas simultanément propre de $\widehat{X}$ et $\widehat{P}$. On a l'intuition que, dans ce cas, $|\varphi\rangle$ est proche d'être simultanément état propre (sans l'être rigoureusement) de $\widehat{X}$ et $\widehat{P}$ et donc qu'un tel état $|\varphi\rangle$ pourrait satisfaire les équation 2 et 3.

Supposons l'existence d'un état $|\alpha\rangle$, de norme unité, et état propre de $\hat{a}$, c'est-à-dire tel que $\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$.

7. Calculer les valeurs moyennes de $\widehat{X}$ et $\widehat{P}$, pour un système préparé dans l'état $|\alpha\rangle$, normé à l'unité. Conclure.

Nous n'allons cependant pas nous satisfaire de cette propriété. En effet, on attend d'un état *quasi-classique* qu'il produise un écart-type de la position et un écart-type de l'impulsion simultanément minimaux.

8. Calculer l'écart type de la position et de l'impulsion lorsque le système est préparé dans l'état $|\alpha\rangle$. Conclure.
9. On peut montrer que la fonction d'onde associée à un état quasi-classique est une fonction gaussienne. Représenter à différents instants la densité de probabilité associée en fonction de la position. Décrire l'évolution temporelle du module carré de la fonction d'onde associée à un état nombre. Représenter schématiquement l'évolution dans l'espace des phases d'un oscillateur harmonique quantique préparé dans un état quasi-classique.
10. Quelle est la signification physique de l'équation $\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$?
11. L'état fondamental de l'oscillateur harmonique est-il un état nombre ou un état quasi-classique ?

Remarques : les états quasi-classiques sont également appelés *états cohérents* car il ont été introduits pour décrire l'état du champ électromagnétique créé par un laser (source cohérente de lumière). Roy Glauber a obtenu le prix Nobel pour cela en 2005. Il sont également appelés *états gaussiens*, puisque la fonction d'onde représentant ces états est gaussienne.