LU3PY101
Physique Quantique 1
2023-2024

TD 6 - ECOC et mesures compatibles – Corrigé –

On considère un système physique dont l'espace des états $\mathcal{E}$ est de dimension 3, et d'hamiltonien représenté par la matrice

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dans la base orthonormée $\mathcal{B}_1 = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. On considère également deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ dont les matrices dans cette même base $\mathcal{B}_1$ s'écrivent

$$\hat{A} = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Les opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont-ils des observables ?

Solution: On a $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ et $\hat{B}^\dagger = \hat{B}$, où $\dagger$ est l'opération de transconjugaison (matrice transposée de la matrice conjuguée). Donc $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont des observables.

2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $\hat{A}$ et $\hat{B}$. On nommera $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ les bases propres respectives

Solution: On observe tout de suite que $|u_2\rangle$ est un vecteurs propre de $\hat{A}$ associé à la valeur propre a, et que $|u_3\rangle$ est un vecteur propre de $\hat{B}$ associé à la valeur propre b. En effet, les matrices de $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont déjà diagonales dans les sous-espaces engendrés respectivement par $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$. Donc il suffit de diagonaliser $\hat{A}$ dans le sous-espace vectoriel engendré par $\{|u_1\rangle, |u_3\rangle\}$ et $\hat{B}$ dans le sous-espace vectoriel engendré par $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$.
Les vecteurs propres et valeurs propres de $\hat{A}$ sont

$$|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + \mathrm{i}|u_3\rangle), a_1 = a \tag{1}$$

$$|v_2\rangle = |u_2\rangle, a_2 = a \tag{2}$$

$$|v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - \mathrm{i}|u_3\rangle), a_3 = -a \tag{3}$$

De plus $\mathcal{B}_2 = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}$. Les vecteurs propres et valeurs propres de $\hat{B}$ sont

$$|w_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle), b_1 = b \tag{4}$$

$$|w_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - |u_2\rangle), b_2 = -b \tag{5}$$

$$|w_3\rangle = |u_3\rangle, b_3 = b \tag{6}$$

$\mathcal{B}_3 = \{|w_1\rangle, |w_2\rangle, |w_3\rangle\}$ est également une base orthonormée de $\mathcal{E}$.

3. $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ sont-elles des bases de vecteurs propres de $\hat{H}$?

Solution: On a

$$\hat{H}|v_1\rangle = 2\hbar\omega_0|v_1\rangle \tag{7}$$

$$\hat{H}|v_2\rangle = \hbar\omega_0|v_2\rangle \tag{8}$$

$$\hat{H}|v_3\rangle = 2\hbar\omega_0|v_3\rangle, \tag{9}$$

$|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$, et $|v_3\rangle$ sont donc des vecteurs propres de $\hat{H}$ associés aux valeurs propres $2\hbar\omega_0$, $\hbar\omega_0$, et $2\hbar\omega_0$ respectivement. De plus comme $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathcal{E}$, c'est une base de vecteurs propres de $\hat{H}$. Par ailleurs, comme $\hat{H}|w_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(2|u_1\rangle + |u_2\rangle)$, vecteur qui n'est pas colinéaire à $|w_1\rangle$, on en déduit que $|w_1\rangle$ n'est pas un vecteur propre de $\hat{H}$. Donc $\mathcal{B}_3$ n'est pas une base de vecteurs propres de $\hat{H}$.

4. Quels ECOC peut-on former avec $\hat{H}$, $\hat{A}$ et $\hat{B}$?

Solution: Il faut d'abord vérifier la condition nécessaire de commutation des opérateurs. On a $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$, $[\hat{B}, \hat{H}] \neq 0$, et $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$. Donc les couples $\{\hat{B}, \hat{H}\}$, $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ et le triplet $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{H}\}$ ne sont pas des ECOC.

Lorsque tous les opérateurs d'un ensemble commutent deux à deux, si la donnée d'un jeu de valeurs propres des opérateurs, construit en choisissant une valeur propre de chaque opérateur, correspond à un unique vecteur propre (ou de manière équivalente s'il existe une unique base commune de vecteur propre pour ces opérateurs), alors cet ensemble d'opérateurs est un ECOC. On voit donc que l'ensemble $\{H\}$ n'est pas un ECOC car la donnée de la valeur propre $2\hbar\omega_0$ renvoie à deux vecteurs propres distincts $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle$ (qui sont des états dégénérés). Un ensemble composé d'un unique opérateur ne peut être un ECOC si au moins une valeur propre à un degré de dégénérescence supérieure à 1. Or a est valeur propre de $\hat{A}$ avec un dégénérescence de 2 et b est valeur propre de $\hat{B}$ avec une dégénérescence de 2. $\{A\}$ et $\{B\}$ ne sont donc pas non plus des ECOC.

Pour ce qui est du couple $\{\hat{A}, \hat{H}\}$, les équations 7, 8 et 9 montrent que la matrice de $\hat{H}$ est la même dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Les équations 1, 2 et 3 donnent l'expression de $\hat{A}$ dans la base $\mathcal{B}_2$:

$$\hat{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors qu'à un unique couple de valeurs propres de $\hat{A}$ et $\hat{H}$ correspond un unique vecteur propre commun aux deux opérateurs. On renomme en général les vecteurs propres communs avec ces couples de valeurs propres. Si l'on note $h_1 = \hbar\omega_0$ et $h_2 = 2\hbar\omega_0$ les notations deviennent

$$\begin{aligned} |v_1\rangle &= |h_2, a\rangle \\ |v_2\rangle &= |h_1, a\rangle \\ |v_3\rangle &= |h_2, -a\rangle \end{aligned}$$

Au final il n'y a qu'un seul ECOC, c'est $\{\hat{A}, \hat{H}\}$.

On dit d'un ECOC qu'il est minimal si l'on ne peut lui retirer une observable sans lui faire perdre son statut d'ECOC.

5. Les ECOC trouvés sont-ils minimaux ?

Solution: On a vu que ni $\{A\}$ ni $\{H\}$ ne sont des ECOC, donc $\{\hat{A}, \hat{H}\}$ est un ECOC minimal.

Supposons que le système soit dans l'état $|\Psi\rangle = N\left(|u_1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|u_2\rangle + |u_3\rangle\right)$.

6. Normaliser ce vecteur d'état.

Solution: on a $\langle\Psi|\Psi\rangle = N^2(1+2+1) = 4N^2$. Or $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$, d'où $N = 1/2$.

7. Quels sont les résultats possibles et les probabilités associées lors d'une mesure de l'énergie ? Même question pour une mesure des grandeurs physiques A ou B. En déduire la valeur moyenne de l'énergie et des grandeurs physiques A et B ainsi que les écarts quadratiques moyens.

Solution: Si l'on mesure l'énergie on ne peut trouver que les valeurs propres du hamiltonien. Pour connaître les probabilités de trouver telle ou telle valeur propre, on projette sur les vecteurs propres associés et on prend le module carré. Notez que si la valeur propre a un degré de dégénérescence supérieur à 1, il faut faire la sommes des projections au carré sur tous les vecteurs propres du sous-espace propres associé. On trouve

$$P_H(\hbar\omega_0) = |\langle\Psi|u_2\rangle|^2 = 1/2$$
$$P_H(2\hbar\omega_0) = |\langle\Psi|u_1\rangle|^2 + |\langle\Psi|u_3\rangle|^2 = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

De même pour A, on a

$$P_A(-a) = |\langle\Psi|v_3\rangle|^2 = 1/4$$
$$P_A(a) = 1 - 1/4 = 3/4,$$

et pour B

$$P_B(-b) = |\langle\Psi|w_2\rangle|^2 = 3/8$$
$$P_B(b) = 1 - 3/8 = 5/8.$$

La manière la plus simple connaissant les probabilité est :

$$\langle\hat{H}\rangle = 2\hbar\omega_0 \times \frac{1}{2} + \hbar\omega_0 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$$

Sinon il faut savoir utiliser la méthode matricielle au cas où on ne connaît pas les probabilités :

$$\langle\hat{H}\rangle = \langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{4}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\hbar\omega_0.$$

De même on trouve $\langle\hat{A}\rangle = a/2$ et $\langle\hat{B}\rangle = b/4$. Puis on calcule les écarts quadratiques moyens : $\Delta\hat{H} = \sqrt{\langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2} = \hbar\omega_0\sqrt{5/2 - 9/4} = \hbar\omega_0/2$. Puis $\Delta\hat{A} = a\sqrt{1-1/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, et $\Delta\hat{B} = b\sqrt{1-1/16} = b\frac{\sqrt{15}}{4}$.

8. Quelles grandeurs peut-on mesurer simultanément ? Quels sont alors les résultats de mesure et les probabilités associées ?

Solution: On peut mesurer simultanément les observables qui commutent. On peut donc mesurer simultanément $\hat{A}$ et $\hat{H}$ (mais pas $\hat{A}$ et $\hat{B}$ ou $\hat{B}$ et $\hat{H}$).

Supposons que l'on mesure l'énergie et que l'on trouve $2\hbar\omega_0$. Supposons qu'ensuite on effectue une mesure de A.

9. Quels sont les résultats de mesure possibles et les probabilités associées ? Supposons que l'on trouve $+a$ comme résultat et que l'on mesure ensuite à nouveau l'énergie, qu'obtiendra-t-on ?

Solution: Si l'on a trouvé l'énergie $2\hbar\omega_0$, cela signifie que le système a été projeté dans le sous espace propre engendré par $\{|v_1\rangle, |v_3\rangle\}$ (la base $\mathcal{B}_2$ diagonalisant simultanément $\hat{H}$ et $\hat{A}$, c'est dans cette base que l'on travaille). Pour déterminer l'état d'arrivée, nous allons projeter sur $\{|v_1\rangle, |v_3\rangle\}$:

$$|\psi'\rangle = \frac{|v_1\rangle \langle v_1|\psi\rangle + |v_3\rangle \langle v_3|\psi\rangle}{\sqrt{|\langle v_1|\psi\rangle|^2 + |\langle v_3|\psi'\rangle|^2}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left(|v_1\rangle + i|v_3\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|u_1\rangle + |u_3\rangle\right)$$

Lors de la mesure de $\hat{A}$ on peut trouver a ou $-a$. De plus

$$\begin{aligned} P_A(a) =& |\langle v_1|\psi'\rangle|^2 + |\langle v_2|\psi'\rangle|^2 = \frac{1}{2} \\ P_A(-a) =& |\langle v_3|\psi'\rangle|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si l'on a trouvé $+a$, cela signifie que le système a été projeté sur $|v_1\rangle$, donc une mesure de l'énergie donne $2\hbar\omega_0$. On remarque qu'une mesure projective "détruit" l'état initial.

Supposons maintenant que l'on mesure l'énergie et que l'on trouve $2\hbar\omega_0$. Supposons qu'ensuite on effectue une mesure de B.

10. Quels sont les résultats de mesure possibles et les probabilités associées ? Supposons que l'on trouve $+b$ comme résultat et que l'on mesure ensuite à nouveau l'énergie, qu'obtiendra-t-on ?

Solution: De même que dans la question précédente, à l'issue de la mesure initiale de l'énergie

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|u_1\rangle + |u_3\rangle\right)$$

(Cette fois on travaille dans la base $\mathcal{B}_1$ car $\hat{H}$ et $\hat{B}$ ne commutent pas, donc il n'y a pas de raison de travailler dans une base propre de l'un plutôt que l'autre. On choisit $\mathcal{B}_1$ car on a déjà exprimé les vecteurs de $\mathcal{B}_3$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}_1$).
Lors de la mesure de $\hat{B}$ on peut trouver b ou $-b$. De plus,

$$P_B(b) = |\langle w_1|\psi'\rangle|^2 + |\langle w_3|\psi'\rangle|^2,$$

en utilisant les équations 4, 5 et 6, on a

$$P_B(b) = \left|\frac{1}{2} \left(\langle u_1| + \langle u_2|\right) \left(|u_1\rangle + |u_3\rangle\right)\right|^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

De plus,

$$\begin{aligned} P_B(-b) =& |\langle w_2|\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|u_1\rangle + |u_3\rangle\right)|^2 \\ P_B(-b) =& \frac{1}{4} \end{aligned}$$

A l'issue de la mesure, si l'on a trouvé $+b$, le système est projeté dans l'état

$$
\begin{aligned}
|\psi'\rangle &\propto \left(|w_1\rangle\langle w_1| + |w_3\rangle\langle w_3|\right)|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|w_1\rangle + \sqrt{2}|w_3\rangle\right) \\
&\propto \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle) + \sqrt{2}|u_3\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Une mesure ultérieure d'énergie donne donc $2\hbar\omega_0$ avec la probabilité $5/6$ et $\hbar\omega_0$ avec la probabilité $1/6$.