TD5 - Mesures quantiques incompatibles – Corrigé –

L'ion monoxyde de carbone

Dans l'ion monoxyde de carbone CO^-, l'électron supplémentaire peut être trouvé soit sur l'atome de carbone en $x = 0$, soit sur l'atome d'oxygène en $x = a$, ces deux valeurs étant les valeurs propres de l'observable position de l'électron notée $\hat{X}$. On note $|0\rangle$ le vecteur propre de $\hat{X}$ associé à la valeur propre 0, et $|a\rangle$ le vecteur propre de $\hat{X}$ associé à la valeur propre a. On considère, dans cet exercice, que l'espace des états de l'électron de l'ion CO^- est à 2 dimensions et que les vecteurs $|0\rangle$ et $|a\rangle$ en forment une base orthonormée.

L'hamiltonien de cet électron s'écrit $\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega(8|0\rangle + 3|a\rangle)$, et $\hat{H}|a\rangle = 3\hbar\omega|0\rangle$, où ω a la dimension d'une fréquence angulaire.

1. Écrire les matrices représentant les opérateurs $\hat{H}$ et $\hat{X}$ dans la base $\{|0\rangle, |a\rangle\}$.

Solution:

$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \text{et} \quad \hat{X} = a \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Est-il possible d'avoir, au même instant, une connaissance exacte de la position de l'électron et de son énergie ? Justifier votre réponse.

Solution: Pour répondre à cette question il faut regarder si les deux observables sont compatibles :

$$[\hat{X}, \hat{H}] = 3a\hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Les observables ne commutent pas, donc elles sont incompatibles. Elles vérifient une inégalité d'Heisenberg, qui signifie que l'on ne peut avoir une connaissance exacte de la position de l'électron et de son énergie.

3. Déterminer les valeurs propres, ainsi qu'une base orthonormée de vecteurs propres de $\hat{H}$.

Solution: Les valeurs propres de $\hat{H}$ sont

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\hbar\omega \\ \lambda_2 &= 9\hbar\omega. \end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés sont

$$|V_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(|0\rangle - 3|a\rangle)$$
$$|V_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|0\rangle + |a\rangle)$$

Le résultat d'une mesure de position de l'électron montre qu'il est sur l'atome de carbone.

4. Quel est l'état de l'électron immédiatement après cette mesure ?

Solution: S'il est sur l'atome de carbone, son état est $|0\rangle$.

5. L'énergie de l'électron est alors mesurée. Quels sont les résultats possibles d'une telle mesure ? Avec quelles probabilités sont-ils obtenus ? Quels sont alors les états possibles immédiatement après la mesure ?

Solution: Les résultats possibles de la mesure sont les valeurs propres du hamiltonien, soit λ_1 ou λ_2. Les probabilités sont

$$P_{\hat{H}}(\lambda_1) = |\langle V_1|0\rangle|^2 = \frac{1}{10}$$
$$P_{\hat{H}}(\lambda_2) = 1 - P_{\hat{H}}(\lambda_1) = \frac{9}{10}.$$

De plus, si l'on a mesuré la valeur propre λ_1, le système est dans l'état $|V_1\rangle$, si l'on a mesuré la valeur propre λ_2, le système est dans l'état $|V_2\rangle$.

6. Immédiatement après cette mesure d'énergie, on effetue une nouvelle mesure de la position de l'électron. Quelle est la probabilité que l'électron soit trouvé sur l'atome de carbone à l'issue de toutes ces mesures ?

Solution: Les résultats possibles de cette mesure sont les valeurs propres de $\hat{X}$, à savoir 0 ou a. Si à l'issue de la précédente mesure le système était dans l'état $|V_1\rangle$, alors la probabilité de mesurer la valeur propre 0 est

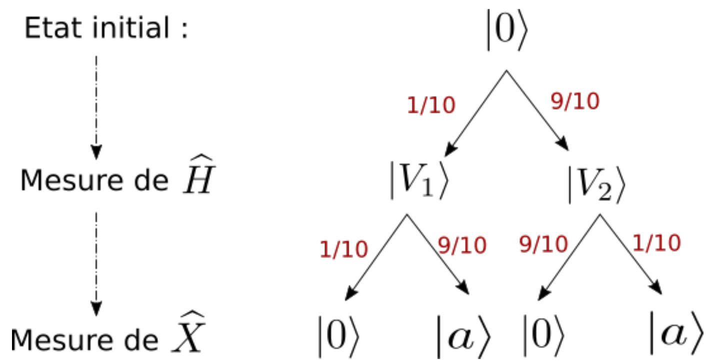
$$P_{\hat{X},|V_1\rangle}(0) = |\langle V_1|0\rangle|^2 = \frac{1}{10}.$$

Par contre si à l'issue de la précédente mesure le système était dans l'état $|V_2\rangle$, alors

$$P_{\hat{X},|V_2\rangle}(0) = |\langle V_2|0\rangle|^2 = \frac{9}{10}.$$

On a donc deux possibilités d'obtenir la valeur propre 0 à l'issue de ces deux mesures (énergie puis position), suivant le résultat de la première mesure (d'énergie). La probabilité que l'électron soit trouvé sur l'atome de carbone à l'issue des deux mesures est donc

$$\begin{aligned} P_{\hat{H},\hat{X}}(|0\rangle) =& P_{\hat{H}}(\lambda_1)P_{\hat{X},|V_1\rangle}(0) + P_{\hat{H}}(\lambda_2)P_{\hat{X},|V_1\rangle}(0) \\ =& \frac{1}{10}\frac{1}{10} + \frac{9}{10}\frac{9}{10} = 0.82 \end{aligned}$$



7. Dans quel état se serait trouvé le système si l'on avait effectué les mesures dans l'ordre inverse (position, puis énergie) ?

Solution: On peut toute de suite répondre qu'il aurait été différent car les observables ne sont pas compatibles. Vérifions le. Si l'on effectue d'abord une mesure de position on trouve la valeur propre 0 avec une probabilité 1 car le système est initialement dans l'état $|0\rangle$. Une mesure ultérieure d'énergie donnera la valeur λ_1 avec un probabilité $|\langle 0|V_1\rangle|^2 = 1/10$ et la valeur λ_2 avec un probabilité $|\langle 0|V_2\rangle|^2 = 9/10$ et projettera la système dans les états $|V_1\rangle$ et $|V_2\rangle$ respectivement.

Si les deux observables avaient été compatibles, l'ordre des mesures n'aurait aucune incidence sur l'état final. En effet leurs deux matrices seraient diagonalisable dans une même base, $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. Écrivons leurs matrices dans cette base

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \text{et} \hat{X} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Supposons que l'état initial soit une combinaison linéaire quelconque des ces deux vecteurs : $|\Psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$. Si l'on mesure d'abord $\hat{H}$ on projette soit dans l'état $|1\rangle$ avec une probabilité $|\alpha|^2$, soit dans l'état $|2\rangle$ avec une probabilité $|\beta^2|$. Lors de la mesure de $\hat{X}$ ultérieure le système reste dans le même état avec une probabilité 1 car les vecteurs $|1\rangle$ et $|2\rangle$ sont propres de $\hat{X}$. A l'issue des deux mesures la probabilité d'être dans l'état $|1\rangle$ est donc $|\alpha|^2$ et celle d'être dans l'état $|2\rangle$ est $|\beta^2|$. On peut faire le même raisonnement en interchangeant $\hat{H}$ et $\hat{X}$ et on trouve le même résultat. L'ordre des mesures n'a aucun impact sur les états finals possibles et leurs probabilités.