LU3PY101
Physique Quantique 1
2023-2024

TD 4 - Formalisme de Dirac
- Opérateurs et représentation matricielle - – Corrigé –

Sous-niveaux hyperfins du Rubidium 87

En l'absence de champ électromagnétique, l'état fondamental de l'atome de rubidium 87, noté $5S_{1/2}$, F=1 est triplement dégénéré. En présence d'un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}$, on observe une levée de cette dégénérescence et l'état $5S_{1/2}$, F=1 se sépare en 3 états notés $\{|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$, d'énergies respectives distinctes $E_0, 0, -E_0$, avec $E_0 > 0$. On pose $E_0 = \hbar\omega$.

L'atome de ^{87}Rb a un moment magnétique. On suppose que l'observable $\hat{M}$ associée à la projection de ce moment magnétique sur une direction fixe perpendiculaire au champ $\mathbf{B}$ est de la forme $\hat{M} = \mu_0 \hat{A}$, avec $\mu_0 > 0$. $\hat{A}$ est défini par

$$\hat{A}|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle, \qquad \hat{A}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \qquad \hat{A}|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle.$$

1. Expliquer ce que signifie le fait que l'état fondamental est « triplement dégénéré », en terme de valeurs propres et de vecteurs propres.

Solution: L'état fondamental est triplement dégénéré car il y a trois vecteurs linéairement indépendants associés à la même valeur propre. Cette valeur propre est choisie (arbitrairement) comme origine des énergies.

2. Écrire la matrice représentative de $\hat{A}$ dans la base $\{|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$.

Solution: La matrice (A) qui représente l'opérateur $\hat{A}$ s'écrit, dans la base $\{|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$

$$(A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} . \qquad (1)$$

3. Calculer les valeurs propres m_1, m_2, m_3 de $\hat{M}$ et les vecteurs propres normalisés correspondants $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle$. On ordonnera les valeurs propres tel que $m_1 > m_2 > m_3$.

Solution: Les valeurs propres de $\hat{M}$ notées $\{m_i\}$ sont telles que $m_i = \mu_0 \times a_i$ où $\{a_i\}$ sont les valeurs propres de $\hat{A}$. Les vecteurs propres de $\hat{M}$ sont les mêmes que ceux de $\hat{A}$. Les valeurs propres $\{a_i\}$ satisfont à l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -a & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -a \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

soit, en développant le déterminant par rapport à la première colonne,

$$-a\left(a^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \times a\right) = 0 \tag{3}$$

soit,

$$a\left(-a^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = a\,(1 - a^2) = 0. \tag{4}$$

Les valeurs propres de $\hat{A}$ sont donc $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, et les valeurs propres de $\hat{M}$ sont donc $m_1 = \mu_0$, $m_2 = 0$, $m_3 = -\mu_0$.
Les vecteurs propres de $\hat{A}$, qui sont aussi ceux de $\hat{M}$, sont caractérisés par des coordonnées (x, y, z) dans la base $\{|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$ telles que

$$\begin{pmatrix} -a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -a & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

soit

$$\begin{cases} -ax + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x - ay + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y - az = 0 \end{cases} . \tag{6}$$

Les solutions de ce système d'équations sont : $z = x$ et $y = \sqrt{2}ax$ pour $a \neq 0$ ou $z = -x$ et $y = 0$ pour $a = 0$. Les vecteurs propres pour les valeurs propres $m_1 = +\mu_0$, $m_2 = 0$, $m_3 = -\mu_0$ s'écrivent, respectivement,

$$\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2}x \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{2}x \\ x \end{pmatrix} . \tag{7}$$

Les vecteurs propres normés sont, respectivement,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} , \tag{8}$$

soit

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{2}\left[|+\rangle + \sqrt{2}|0\rangle + |-\rangle\right], \tag{9}$$

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle - |-\rangle\right], \tag{10}$$

$$|\varphi_3\rangle = \frac{1}{2}\left[|+\rangle - \sqrt{2}|0\rangle + |-\rangle\right]. \tag{11}$$

À $t = 0$, on prépare le système dans l'état $|\varphi_1\rangle$.

4. On mesure alors l'énergie totale. Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Donner alors la valeur moyenne de l'énergie $\langle E\rangle$ ainsi que son écart quadratique moyen ΔE.

Solution: Si on mesure l'énergie on peut a priori trouver une des valeurs propres du hamiltonien, soit E_0, 0, ou $-E_0$. Les probabilités associées sont, une nouvelle fois, les probabilités de trouver le système dans l'état propre associée à l'énergie propre considérée :

$$P(E = E_0) = P(+) = |\langle +|\varphi_1\rangle|^2 = \frac{1}{4}, \tag{12}$$

$$P(E = 0) = P(0) = |\langle 0|\varphi_1\rangle|^2 = \frac{1}{2}, \tag{13}$$

$$P(E = -E_0) = P(-) = |\langle -|\varphi_1\rangle|^2 = \frac{1}{4}. \tag{14}$$

La valeur moyenne de l'énergie est alors égale à

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= E_0 \times P(E = E_0) + 0 \times P(E = 0) + (-E_0) \times P(E = -E_0)\\ &= E_0 \times P(+) + 0 \times P(0) + (-E_0) \times P(-) = 0.\end{aligned}$$

Pour trouver l'écart quadratique moyen il faut connaître les résultats de mesure du carré de l'énergie. L'opérateur $\hat{H}^2$ possède une valeur propre dégénérée deux fois E_0^2 associée aux vecteurs propres $|+\rangle$ et $|-\rangle$ et une valeur propre non dégénérée 0, associée au vecteur propre $|0\rangle$. De façon générale, si λ_i est une valeur propre de l'observable $\hat{A}$ la probabilité d'obtenir la valeur propre λ_i^n en mesurant la grandeur A^n est la même que la probabilité d'obtenir la valeur propre λ_i en mesurant la grandeur A. Ici, on a

$$\begin{aligned}\langle E^2\rangle &= (E_0)^2 \times P(E = E_0) + (0)^2 \times P(E = 0) + (-E_0)^2 \times P(E = -E_0)\\ &= (E_0)^2 \times P(+) + (0)^2 \times P(0) + (-E_0)^2 \times P(-)\\ &= (E_0)^2 \times \frac{1}{4} + (-E_0)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}E_0^2,\end{aligned}$$

et

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}E_0 \tag{15}$$

5. Si l'on n'effectue pas de mesure mais qu'on laisse évoluer l'état $|\varphi_1\rangle$, quel est l'état $|\varphi(t)\rangle$, à un instant $t > 0$? Donner alors la valeur moyenne de l'énergie $\langle E\rangle$ à l'instant t.

Solution:

$$|\varphi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[e^{-iE_0\,t/\hbar}\,|+\rangle + \sqrt{2}|0\rangle + e^{iE_0\,t/\hbar}\,|-\rangle\right] \tag{16}$$

$\hat{H}$ est une constante du mouvement (il commute avec lui-même), donc c'est une quantité conservée. D'où $\langle E\rangle(t) = \langle E\rangle(t = 0) = 0$.

Faisons tout de même le calcul. Si l'on mesure l'énergie à l'instant t on pourra obtenir le résultat E_0 avec la probabilité $P(E_0) = \left|\frac{1}{2}e^{-iE_0\,t/\hbar}\right|^2 = \frac{1}{4}$, ou bien le résultat 0 avec la probabilité $P(0) = \left|\frac{1}{2}\sqrt{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$, ou bien résultat $-E_0$ avec la probabilité $P(-E_0) = \left|\frac{1}{2}e^{iE_0\,t/\hbar}\right|^2 = \frac{1}{4}$. On obtient donc les mêmes résultats de mesure qu'à $t = 0$.

À l'instant t, on mesure la grandeur physique associée à l'observable $\hat{M}$.

6. Quelles valeurs peut-on mesurer et avec quelles probabilités ?

Solution: On pourra trouver a priori une des valeurs propres de l'observable $\hat{M}$, soit μ_0, 0, et $-\mu_0$, avec les probabilités respectives

$$P(\mu_0) = |\langle\varphi_1|\varphi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{-iE_0\,t/\hbar}\ \langle\varphi_1|+\rangle + \sqrt{2}\langle\varphi_1|0\rangle + e^{iE_0\,t/\hbar}\ \langle\varphi_1|-\rangle\right|^2, \tag{17}$$

$$P(0) = |\langle\varphi_2|\varphi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{-iE_0\,t/\hbar}\ \langle\varphi_2|+\rangle + \sqrt{2}\langle\varphi_2|0\rangle + e^{iE_0\,t/\hbar}\ \langle\varphi_2|-\rangle\right|^2, \tag{18}$$

$$P(-\mu_0) = |\langle\varphi_3|\varphi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{-iE_0\,t/\hbar}\ \langle\varphi_3|+\rangle + \sqrt{2}\langle\varphi_3|0\rangle + e^{iE_0\,t/\hbar}\ \langle\varphi_3|-\rangle\right|^2. \tag{19}$$

Pour obtenir par exemple $\langle\varphi_2|+\rangle$ on projette l'équation (10) sur $\langle+|$ et on obtient $\langle+|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$P(\mu_0) = \frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}e^{-iE_0\,t/\hbar}\ + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}e^{iE_0\,t/\hbar}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\cos(E_0\,t/\hbar)\ + 1\right|^2 \tag{20}$$

$$P(0) = \frac{1}{2}\sin^2(E_0\,t/\hbar) \tag{21}$$

$$P(-\mu_0) = \frac{1}{4}\left|\cos(E_0\,t/\hbar)\ - 1\right|^2 \tag{22}$$

On vérifie bien que la somme des probabilités est égale à 1.

7. Calculer la valeur moyenne de $\langle\hat{M}\rangle$ à l'instant t.

Solution: $\langle\hat{M}\rangle = \mu_0 \times P(\mu_0) + 0 \times P(0) + (-\mu_0) \times P(-\mu 0) = \mu_0 \times \cos(E_0\,t/\hbar)$.

8. Interpréter physiquement l'évolution de la valeur moyenne de la composante du moment magnétique transverse.

Solution: On retrouve un résultat classique qui dit qu'un moment magnétique plongé dans un champ magnétique statique précesse autour de ce champ. C'est la précession de Larmor.