

## TD 3 - BOÎTE QUANTIQUE ET THÉORÈME D'EHRENFEST

On s'intéresse aux états quantiques d'une particule de masse  $m$  piégée dans un puits de potentiel infini de largeur  $a$  et centré en  $x = 0$ . On pose pour tout entier  $n > 0$  :

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} \left(\frac{a}{2} - x\right)\right) \quad (1)$$

1. Retrouver rapidement l'expression des énergies propres  $E_n = n^2 E_1$  du puits carré infini, et montrer que les fonctions d'ondes associées sont les  $\phi_n(x)$ .
2. Représenter les fonctions d'ondes ainsi que les densités de probabilité des deux premiers niveaux.

### Superposition d'états stationnaires

On suppose que la particule est préparée dans l'état quantique suivant :

$$|\psi(t=0)\rangle = N (|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle) \quad (2)$$

avec  $N$  un coefficient réel positif.

3. Déterminer la valeur de  $N$  pour normer cet état à l'unité.
4. Représenter l'allure de la fonction d'onde associée, ainsi que la densité de probabilité correspondante. De quel côté du puits s'attend-on à davantage trouver la particule lors d'une mesure de position ?
5. Déterminer l'endroit  $x_0$  où la densité de probabilité s'annule vers le milieu du puits. Comment interpréter la possibilité de détecter la particule de chaque côté de ce point si la particule ne peut pas exister en ce point ?
6. Montrer que la valeur moyenne de la position à  $t = 0$  est donnée par  $\langle x \rangle(t=0) = -\langle \phi_1 | \hat{x} | \phi_2 \rangle$ .
7. En déduire que

$$\langle x \rangle(t=0) = -\frac{16a}{9\pi^2}.$$

8. On mesure l'énergie à l'instant  $t = 0$ , quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?
9. Calculer la valeur moyenne de l'énergie ainsi que son écart quadratique  $\Delta E$  en fonction de  $E_1$ .

## Évolution temporelle - théorème d'Ehrenfest

10. Donner l'expression de  $|\psi(t)\rangle$  sur la base  $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ .
11. Calculer la valeur moyenne de la position à l'instant  $t$ , notée  $\langle x \rangle(t)$ . À quelle fréquence cette position moyenne oscille-t-elle de droite à gauche dans le puits ?
12. Y a-t-il des endroits (en dehors des bords) où s'annule la densité de probabilité de présence au cours du temps ?

On peut montrer que  $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$ .

13. Que vaut  $[\hat{x}, \hat{H}]$  ?
14. À l'aide du théorème d'Ehrenfest, donner l'expression de la valeur moyenne de l'impulsion à l'instant  $t$  notée  $\langle \hat{p}_x \rangle(t)$ .