LU3PY101
Physique Quantique 1
2023-2024

TD 2 - États de diffusion : effet Ramsauer-Townsend

L'effet Ramsauer a été observé pour la première fois il y a environ 100 ans, en 1921, dans l'étude de collisions d'électrons sur des atomes de gaz rares (helium, argon ou néon). Un faisceau d'électrons est créé dans une cellule en verre contenant un gaz rare. Pour certaines valeurs de leur énergie cinétique, les électrons traversent le gaz sans être affectés par sa présence.

1 Modèle

Pour expliquer ce phénomène, nous allons utiliser le modèle unidimensionnel suivant : les électrons de masse m et d'énergie $E > 0$ sont modélisés par une solution stationnaire de l'équation de Schrödinger pour le potentiel de la Figure 1. Le faisceau d'électrons se déplace vers la droite dans le sens des x croissants. L'atome de gaz rare est modélisé par un puits de potentiel attractif de largeur $2a$ et de profondeur $V_0 > 0$, centré en $x = 0$.

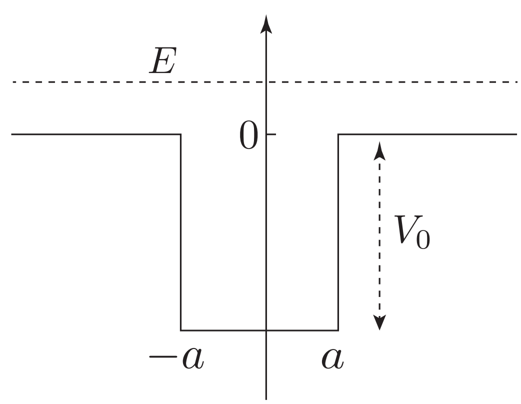

FIGURE 1 – Energie potentielle d'un électron incident sur un atome de gaz rare.

La partie spatiale des solutions est

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= e^{ikx} + Ae^{-ikx} \quad \text{si } x \leq -a \text{ (région I)} \\
\varphi(x) &= Be^{iqx} + Ce^{-iqx} \quad \text{si } -a < x < a \text{ (région II)} \\
\varphi(x) &= De^{ikx} \quad \text{si } x \geq a \text{ (région III)},
\end{aligned}$$

où A, B, C, D sont des nombres complexes.

1. Justifier la solution donnée pour chaque région de l'espace en précisant le sens de propagation des électrons.
2. Donner les expressions de k et q en fonction de l'énergie totale E de l'électron, de sa masse m et de V_0.

2 Courant de probabilité

On va maintenant considérer ce problème sous l'angle du formalisme du courant de probabilité.

3. Donner la fonction d'onde complète $\psi(x,t)$ (dépendances spatiale et temporelle).
4. Rappeler l'expression de la densité de probabilité de présence $\rho(x,t)$ en fonction de $\psi(x,t)$.
5. En utilisant l'équation de Schrödinger, montrer que pour un problème tri-dimensionnel $\rho(\vec{r},t)$ s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^*\right)$$

La densité de courant de probabilité $\vec{J}$ est définie par l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \mathrm{div}\ \vec{J} = 0,$$

aussi appelée équation de conservation de la probabilité. On peut faire l'analogie avec une densité de courant électrique, ou une densité de courant de particules, ou n'importe quelle autre densité de courant.

6. À l'aide de la question précédente, montrer que

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right).$$

7. Montrer que $\vec{J}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\psi^*\frac{\hat{p}}{m}\psi\right]$, où $\hat{p}$ est l'opérateur impulsion.

3 Effet Ramsauer

8. En utilisant le résultat de la question précédente, calculer le courant de probabilité incident $\vec{J}_{inc}$ et le courant de probabilité réfléchi dans la région I. En déduire le coefficient de réflexion R donné par $\frac{||\vec{J}_{ref}||}{||\vec{J}_{inc}||}$.
9. En se plaçant à l'instant $t = 0$ représenter de façon schématique la partie réelle de la fonction d'onde dans chacune des trois régions de l'espace.
10. Quel système d'équations permet de relier les coefficient A, B, C, D ? (On ne demande pas ici de le résoudre.)
11. Le coefficient A est donné par

$$A = \frac{k^2 - q^2}{\Delta}\ e^{-2ika}\left(1 - e^{4iqa}\right),$$

avec $\Delta = (q+k)^2 - e^{4iqa}(q-k)^2$. Donner l'expression du coefficient de réflexion R et de transmission T (sans chercher à expliciter $|\Delta|^2$.)

12. Donner la condition sur q qui permet d'observer l'effet Ramsauer (qui assure une transmission totale). En déduire une condition sur l'énergie de l'électron incident.

    On observe que la condition sur l'énergie fait intervenir les énergies propres d'un puits carré infini.
13. Interpréter le résultat de la question précédente.
14. Expliquer comment procéder expérimentalement pour déterminer V_0.