LU3PY101
Physique Quantique 1
2022-2023

TD 7 - Oscillateur harmonique quantique unidimensionnel

Une particule de masse m est soumise au potentiel harmonique $\widehat{V}(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$. On introduit les opérateurs adimensionnés $\widehat{X} = \hat{x}/x_0$ et $\widehat{P} = \hat{p}/p_0$, où $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$ et $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$. On rappelle que les opérateurs de création et d'annihilation sont définis par

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\widehat{X} + i\widehat{P}\right], \text{ et } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\widehat{X} - i\widehat{P}\right].$$

1 Quelques manipulations autour de l'énergie

1. Rappeler les expressions de $\hat{a}|n\rangle$ et $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ en fonctions d'états propres du hamiltonien, ainsi que l'interprétation de ces expressions.
2. Exprimer les opérateurs énergie cinétique $\widehat{T}$ et énergie potentielle $\widehat{V}$ en fonction des opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ puis en fonction des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$.
3. Montrer que la valeur moyenne de l'énergie cinétique est égale à la valeur moyenne de l'énergie potentielle lorsque le système est dans un état propre du hamiltonien.
4. En déduire sans calcul ces deux valeurs moyennes.
5. Retrouver le résultat de la question 4 par un calcul explicite de l'action des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ sur n.
6. *(Bonus)* Montrer que pour un système décrit par un hamiltonien $\widehat{H}_\lambda$ dépendant d'un certain paramètre λ réel, alors, si $|\Psi_\lambda\rangle$ est un état propre normalisé de $\widehat{H_\lambda}$ d'énergie E_λ, la relation

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} = \langle \Psi_\lambda | \frac{\partial \widehat{H}_\lambda}{\partial \lambda} | \Psi_\lambda \rangle$$

   est vérifiée. Elle est connue sous le nom de théorème d'Hellmann-Feynman. Elle permet de déterminer la dérivée des énergies propres en fonction d'un paramètre dont dépend le hamiltonien.
7. *(Bonus)* Appliquer le théorème d'Hellmann-Feynman à l'oscillateur harmonique quantique, pour le paramètre ω. Montrer qu'on retrouve l'expression de $\langle V \rangle_n$ déterminée précédemment. Appliquer ce même théorème pour le paramètre m. Conclure.
8. Déterminer les énergies potentielles et cinétiques moyennes lorsque le système est dans un état quasi-classique. Commenter les résultats obtenus.

2 Relation d'incertitude d'Heisenberg

9. En considérant le système dans un état nombre, et en utilisant les résultats de la partie précédente, déterminer le produit $\Delta\widehat{X}\Delta\widehat{P}$.

10. L'inégalité d'Heisenberg est elle vérifiée pour tout n ? Commenter le cas $n = 0$. Comparer au cas des états quasi-classiques.

3 États quasi-classiques

Dans cette partie nous allons démontrer certaines propriétés des états quasi-classiques étudiés en cours. Dans un premier temps on souhaite trouver la relation de passage entre la base des états de Fock et la base des états quasi-classiques.

11. Exprimer les coefficients c_n de la décomposition d'un état quasi-classique sur la base des états nombres, en fonction de c_0.
12. Déterminer c_0 en utilisant la condition de normalisation des états quasi-classiques. En déduire la relation de changement de base souhaitée.

On suppose que l'on dispose d'un compteur de photons, c'est-à-dire d'un appareil de mesure qui projette dans la base des états nombre.

13. Exprimer la valeur moyenne de l'opérateur nombre pour un système dans un état quasi-classique. On la notera $\langle n \rangle$. Conclure sur la signification du coefficient α.
14. Quelle est la variance Δn^2 du nombre de photons dans un état quasi-classique ?
15. Si l'oscillateur harmonique est dans un état quasi-classique (par exemple l'état du champ électromagnétique à la sortie d'un laser), quelle est la probabilité $P(n)$ de mesurer n photons avec ce détecteur ?