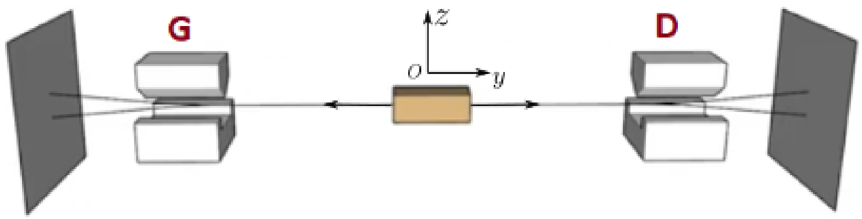
LU3PY101
Physique Quantique 1
2022-2023

TD11 – Inégalités de Bell – Corrigé –



On considère une source d'atomes d'argents capable de générer des paires d'atomes intriqués. L'un des atomes de chaque paire (noté d) est éjecte vers la droite et mesuré par un appareil de Stern et Gerlach (S&G) (D), et l'autre atome de la paire (noté g) est éjecté à gauche et mesuré par un autre appareil de S&G (G). On supposera que le D est légèrement plus proche de la source et effectue sa mesure juste avant G.

1 Même orientation pour D et G

Dans un premier temps les deux S&G sont orientés suivant l'axe Oz. On note $\{|+_{\text{g}}\rangle, |-_{\text{g}}\rangle\}$ et $\{|+_{\text{d}}\rangle, |-_{\text{d}}\rangle\}$ les bases propres des observables associées aux deux S&G.

1. Donner une base de l'espace produit tensoriel $E = E_{\text{g}} \otimes E_{\text{d}}$ associé aux deux atomes d'argent.

> **Solution:** Une base est obtenue en prenant toutes les combinaisons possibles de produits tensoriels des vecteurs des bases de E_{g} et E_{d}, soit
>
> $$\{|+_{\text{g}}+_{\text{d}}\rangle, |-_{\text{g}}-_{\text{d}}\rangle, |+_{\text{g}}-_{\text{d}}\rangle, |-_{\text{g}}+_{\text{d}}\rangle\}.$$
>
> E est donc un espace de dimension 4.

On suppose que l'état intriqué généré par la source d'atomes dans la base propres des observables associées aux deux S&G s'écrit

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+_{\text{g}}+_{\text{d}}\rangle + |-_{\text{g}}-_{\text{d}}\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|++\rangle + |--\rangle\right)$$

2. Supposons que D mesure $+\hbar/2$. Quelle est l'état du système après la mesure de D ? Quelle était la probabilité de mesurer $+\hbar/2$?

Solution: Si l'on a mesuré $+\hbar/2$, c'est que l'on a appliqué le projecteur $\mathbb{1}_\text{g} \otimes |+_\text{d}\rangle\langle +_\text{d}|$ à l'état Ψ. Après la première mesure, la paire est donc dans l'état $|++\rangle$. La probabilité de mesurer $+\hbar/2$ était donc

$$|\langle \Psi|++\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

3. Quelle est alors la probabilité P_{++} de mesurer successivement $+\hbar/2$ avec D et $+\hbar/2$ avec G ?

Solution: La probabilité de mesurer $+\hbar/2$ avec D vaut $\frac{1}{2}$ d'après la question précédente. L'état de la paire après la première mesure est $|++\rangle$, donc la probabilité de mesurer ensuite $+\hbar/2$ avec G vaut 1. Ainsi,

$$P_{++} = \frac{1}{2} \times 1$$

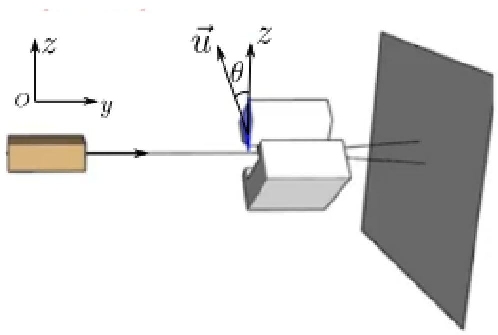
4. En déduire les autres probabilités P_{--}, P_{+-}, P_{-+}.

Solution: $P_{++} = P_{--} = 1/2$, et $P_{+-} = P_{-+} = 0$.

On introduit le coefficient de corrélation $C = P_{++} + P_{--} - (P_{+-} + P_{-+})$.

5. Que vaut C dans cette configuration de mesure ? Quelle est la signification de ce résultat ?

Solution: $C = 1$. Les mesures sont parfaitement corrélées : le résultat de la mesure à droite détermine totalement celui de la mesure à gauche. C'est le point de départ de l'une des plus importantes discussions scientifiques entre Einstein et Bohr. Einstein pensant que la corrélation parfaite est encodée dans une variable cachée partagée entre les deux particules, et que donc l'état de la paire est défini dès le départ (la mécanique quantique est incomplète). Bohr pense que l'état mesuré ne préexiste pas, il faut accepter cette corrélation, et il n'y a pas besoin d'introduire d'autes ingrédients dans la théorie pour cela (la mécanique quantique est complète).



2 Mesure dans une base tournée d'un angle θ

Dans le TD 9, nous avons vu que si l'on tourne le S&G suivant un axe dirigé par $\vec{u}$ tourné d'un angle θ par rapport à (Oz), la matrice de l'observable associée au S&G s'écrit dans la base des étas propres de $\widehat{S}_z$:

$$(S_u)_{\mathbf{B}_z} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

car dans la paramétrisation choisie dans ce TD, $\phi = 0$. Nous avions également déterminé les vecteurs propres de (S_u) dans la base $\mathbf{B}_z = \{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$|+\rangle_{\vec{u}} = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle \tag{1}$$
$$|-\rangle_{\vec{u}} = \sin\frac{\theta}{2}|+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|-\rangle \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

Comme contrairement au TD9, il n'y a besoin que d'un seul angle pour déterminer totalement la direction $\vec{u}$ (car $\phi = 0$), on notera

$$|\pm\rangle_{\vec{u}} \equiv |\pm_\theta\rangle.$$

6. Exprimer les vecteurs de la base $\mathbf{B}_z$ en fonction de ceux de la base $\mathbf{B}_\theta \equiv |\pm_\theta\rangle$.

Solution: En inverse une matrice 2x2, comme dans un TD pécédent. La matrice inverse est obtenue en échangeant les coefficients diagonaux, et en mettant un signe moins sur les coefficients antidiagonaux. Enfin, il faut diviser par le déterminant de la matrice initiale. On trouve que la matrice de passage est sa propre inverse (la matrice d'Hadamard est un cas particulier de cette matrice obtenu pour $\theta = \pi/2$). Ainsi,

$$
\begin{aligned}
|+\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}|+_\theta\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-_\theta\rangle \\
|-\rangle &= \sin\frac{\theta}{2}|+_\theta\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|-_\theta\rangle
\end{aligned}
$$

3 Intrication, changement de base, paradoxe EPR

Revenons à la situation de la section 1. On suppose que la source prépare toujours l'état $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|++\rangle + |--\rangle\right)$, où $|\pm\rangle$ sont les états propres des S&G orientés suivant Oz. Par contre les deux S&G ont toujours le même axe, mais celui-ci est tourné d'un angle θ par rapport à Oz.

7. Donner une base de l'espace produit tensoriel E, construite à partir des bases $|\pm_\theta\rangle$.

Solution: De même que dans la première partie, on prend toutes les possibilités de produits tensoriels entre ces états :

$$\{|+_\theta +_\theta\rangle, |-_\theta +_\theta\rangle, |+_\theta -_\theta\rangle, |-_\theta -_\theta\rangle\}.$$

8. Écrire l'état $|\Psi\rangle$ dans cette base.

Solution:

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle = &\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}|+_\theta\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-_\theta\rangle\right] \otimes \left[\cos\frac{\theta}{2}|+_\theta\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-_\theta\rangle\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\theta}{2}|+_\theta\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|-_\theta\rangle\right] \otimes \left[\sin\frac{\theta}{2}|+_\theta\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|-_\theta\rangle\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+_\theta +_\theta\rangle + |-_\theta -_\theta\rangle\right),
\end{aligned}
$$

cf. cours 11.

9. L'état dans la base tournée d'un angle θ est-il intriqué ?

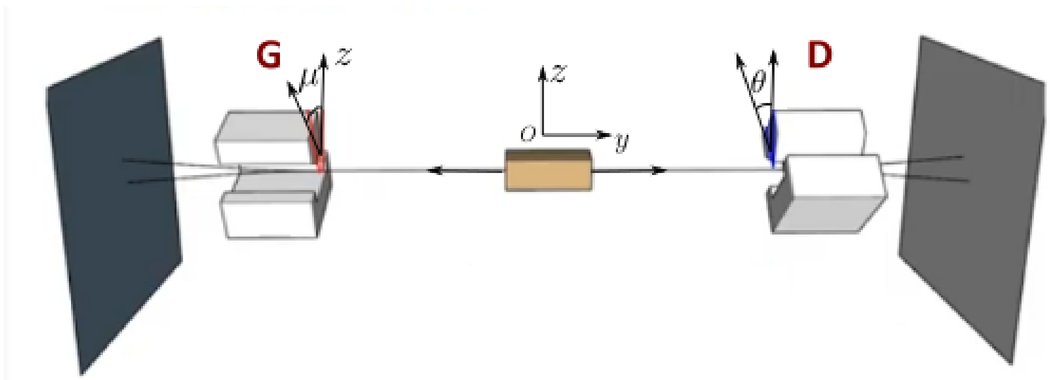
Solution: Oui, l'état est donc intriqué quel que soit la base. Les résultats de mesure sont donc corrélés quelle que soit la base choisie.

10. Pourquoi Einstein, Podolsky et Rosen en déduisent que la mécanique quantique est incomplète ?

Solution: Il leur semble surprenant qu'une mesure de l'atome de droite **dans n'importe quelle base** impose l'état de l'atome de gauche, d'autant que ces mesures ne commutent pas entre elles (c'est une propriété du groupe des rotation qui est non-commutatif). Einstein et ses amis pensaient donc que l'état du système devait préexister à la mesure. À l'inverse Bohr s'opposait à l'existence de l'état avant la mesure.

4 Mesures et corrélations pour des angles différents

On génère toujours le même état initial $|\Psi\rangle$, mais on tourne maintenant les S&G d'un angle différent. On tourne D d'un angle θ et G d'un angle μ.



11. Quelle est la probabilité $P_{++}(\theta,\mu)$ de mesurer la valeur propre $\hbar/2$ avec D, puis de mesurer $\hbar/2$ avec G ? Que valent $P_{--}(\theta,\mu)$, $P_{-+}(\theta,\mu)$, et $P_{+-}(\theta,\mu)$?

Solution:

$$\begin{aligned} P_{++}(\theta,\mu) &= |\langle\Psi|+_\mu+_\theta\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}\,|(\langle+_\theta+_\theta| + \langle-_\theta-_\theta|)\,|+_\mu+_\theta\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}|\langle+_\mu|+_\theta\rangle|^2 \end{aligned}$$

Le facteur $1/2$ est la probabilité de mesurer $\hbar/2$ lors de la mesure avec D. Le terme suivant est la probabilité de mesurer $\hbar/2$ avec G sachant que l'atome de gauche est dans l'état $|+_\theta\rangle$ juste avant la mesure. Pour déterminer ce terme, on utilise le changement de base déterminé précédemment :

$$\begin{aligned} \cos\frac{\theta}{2}|+_\theta\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-_\theta\rangle &= \cos\frac{\mu}{2}|+_\mu\rangle + \sin\frac{\mu}{2}|-_\mu\rangle \\ \sin\frac{\theta}{2}|+_\theta\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|-_\theta\rangle &= \sin\frac{\mu}{2}|+_\mu\rangle - \cos\frac{\mu}{2}|-_\mu\rangle \end{aligned}$$

En projetant ces deux équations sur $|+_\mu\rangle$, on trouve

$$\cos\frac{\theta}{2}\langle +_\mu|+_\theta\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\langle +_\mu|-_\theta\rangle = \cos\frac{\mu}{2}$$
$$\sin\frac{\theta}{2}\langle +_\mu|+_\theta\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\langle +_\mu|-_\theta\rangle = \sin\frac{\mu}{2}$$

En faisant les bonnes combinaisons linéaires de ces équations on trouve

$$\langle +_\mu|+_\theta\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\mu}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\mu}{2} = \cos\left(\frac{\theta-\mu}{2}\right).$$

D'où

$$P_{++}(\theta,\mu) = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\theta-\mu}{2}\right).$$

On peut montrer de même que $P_{++} = P_{--}$.
Par ailleurs, on peut aussi calculer de la même manière

$$P_{-+}(\theta,\mu) = P_{+-}(\theta,\mu) = \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\theta-\mu}{2}\right).$$

On vérifie bien $P_{++} + P_{-+} + P_{+-} + P_{--} = 1$.

12. Que vaut la probabilité $P_+(\theta)$ d'obtenir la mesure $\hbar/2$ sur l'atome de droite indépendamment de la mesure du second atome ? et la probabilité $P_-(\theta)$ d'obtenir $-\hbar/2$?

Solution:
$$P_+(\theta) = P_{++} + P_{+-} = \frac{1}{2}\left(\cos^2(\theta-\mu) + \sin^2(\theta-\mu)\right) = \frac{1}{2}.$$
De même $P_-(\theta) = \frac{1}{2}$.

13. Que vaut la probabilité $P_+(\mu)$ d'obtenir la mesure $\hbar/2$ sur l'atome de gauche indépendamment de la mesure du second atome ? et la probabilité $P_-(\mu)$ d'obtenir $-\hbar/2$?

Solution: De même $P_-(\mu) = P_+(\mu) = \frac{1}{2}$.

On introduit la variable aléatoire $\mathcal{D}(\theta)$ qui prend la valeur ±1, suivant que la mesure de D donne $\pm\hbar/2$.

14. Que vaut $P[\mathcal{D}(\theta) = 1]$ pour $|\Psi\rangle$? et $P[\mathcal{D}(\theta) = -1]$?

Solution: La probabilité de mesurer $\hbar/2$ sur le premier atome est $P[\mathcal{D}(\theta) = 1] = \frac{1}{2}$. De même $P[\mathcal{D}(\theta) = -1] = \frac{1}{2}$

15. Quelle est la moyenne statistique (l'espérance) de $\mathcal{D}(\theta)$ notée $\overline{\mathcal{D}(\theta)}$

Solution: On a
$$\overline{\mathcal{D}(\theta)} = 1 \times P[\mathcal{D}(\theta) = 1] - 1 \times P[\mathcal{D}(\theta) = -1] = 0$$

On introduit de manière similaire $\mathcal{G}(\mu)$ pour les mesures sur le second atome.

16. Que vaut $\overline{\mathcal{G}(\mu)}$?

Solution: On calcule de façon similaire $\overline{\mathcal{G}(\mu)} = 0$.

On définit le coefficient de corrélation $E(\theta, \mu)$ entre les deux variables aléatoires

$$E(\theta, \mu) = \frac{\overline{\mathcal{D}(\theta)\mathcal{G}(\mu)} - \overline{\mathcal{D}(\theta)}\ \overline{\mathcal{G}(\mu)}}{\sqrt{\overline{|\mathcal{D}(\theta)|^2}\ \overline{|\mathcal{G}(\mu)|^2}}}$$

17. Que vaut $E(\theta, \mu)$ pour l'état $|\Psi\rangle$?

Solution: On a $\overline{\mathcal{D}(\theta)\mathcal{G}(\mu)} = (+1)(+1) \times P_{++}(\theta, \mu) + (-1)(-1) \times P_{--}(\theta, \mu) + (+1)(-1) \times P_{+-}(\theta, \mu) + (-1)(+1) \times P_{-+}(\theta, \mu) = P_{++}(\theta, \mu) + P_{--}(\theta, \mu) - P_{+-}(\theta, \mu) - P_{-+}(\theta, \mu)$, soit

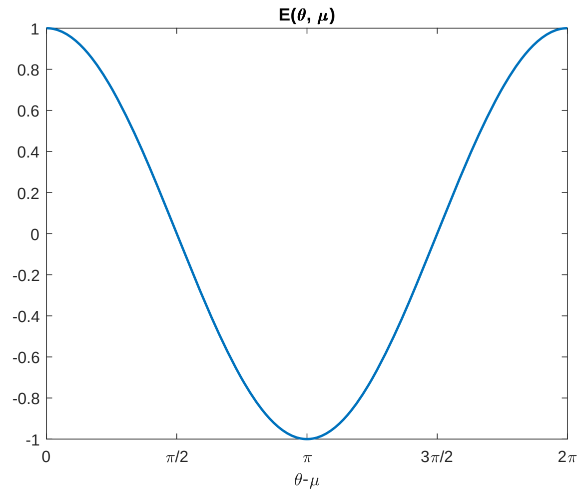
$$\overline{\mathcal{D}(\theta)\mathcal{G}(\mu)} = \cos^2 \frac{(\theta - \mu)}{2} - \sin^2 \frac{(\theta - \mu)}{2} = \cos(\theta - \mu).$$

Par ailleurs $\overline{\mathcal{D}(\theta)} = 0$ et $|D(\theta)|^2 = 1$ donc $\overline{|\mathcal{D}(\theta)|^2} = 1$, de même pour $\overline{\mathcal{G}(\mu)} = 0$ et $\overline{|\mathcal{G}(\mu)|^2} = 1$. On a alors :

$$E(\theta, \mu) = \overline{\mathcal{D}(\theta)\mathcal{G}(\mu)} = \cos(\theta - \mu).$$

18. Expliquer les valeurs prises par le coefficient de corrélation $E(\theta, \mu)$ suivant les valeurs des angles θ et μ (on pourra tracer cette fonction en fonction de $\theta - \mu$).

Solution:



Lorsque $\theta - \mu = 0[2\pi]$ (même direction/sens pour les S&Gs), $E(\theta, \mu) = 1$ et la corrélation est parfaite : si l'on mesure 1 (resp. -1) pour le premier atome on est sûrs de mesurer 1 (resp. -1) pour le second. Lorsque $\theta - \mu = \pi[2\pi]$ (même direction mais sens opposés pour les S&Gs), $E(\theta, \mu) = -1$ et l'anticorrrélation est parfaite : si l'on mesure 1 (resp. -1) pour le premier atome on est sûr de mesurer -1 (resp. 1) pour le second. Lorsque $\theta - \mu = \pi/2[\pi]$, $E(\theta, \mu) = 0$, il n'y a aucune corrélation entre les deux mesures (S&Gs à 90 degrés l'un par rapport à l'autre).

5 Description à l'aide d'une variable cachée

En fait on peut comprendre ces corrélations sans faire appel à l'intrication. Les résultats prédits par la mécanique quantique pour l'état $|\Psi\rangle$, mesuré selon Oz sont $P_{++} = P_{--} = 1/2$ et $P_{+-} = P-+ = 0$. Si l'on suppose que 50 % des paires d'atomes sont en fait dans l'état $|++\rangle$ et 50 % des paires d'atomes sont dans l'état $|--\rangle$, on retrouve ces probabilités. Cependant, cet état n'est pas décrit dans le formalisme quantique par un état pur $|\Psi\rangle$ mais par deux états émis aléatoirement. Il est donc nécessaire d'ajouter quelque chose à la théorie pour prendre en compte ces corrélations.

Partant de ce constat Einstein, Podolsky et Rosen, proposent d'ajouter une nouvelle variable à la mécanique quantique qui permet de distinguer entre les types de paires émises. Donnons lui le nom de variable cachée et notons-la λ. Cette variable a les propriétés suivantes :
— elle permet de décrire les corrélations de spin entre les deux atomes. Elle est donc identique pour les deux atomes et change aléatoirement d'une paire à l'autre.
— c'est une variable aléatoire de densité de probabilité $\rho(\lambda)$ telle que $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$.

On introduit les fonctions $\mathcal{D}(\lambda, \theta)$ et $\mathcal{G}(\lambda, \mu)$ pour décrire les mesures de spin du premier atome selon θ et du second atome selon μ. Ces fonctions prennent les valeurs ± 1.

19. Justifier la relation suivante :

$$\int \mathcal{D}(\lambda, \theta)\rho(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \int \mathcal{G}(\lambda, \mu)\rho(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = 0$$

Solution: La probabilité d'obtenir 1 et -1 est la même donc la valeur moyenne de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$ doit être nulle.

20. Donner $E(\theta,\mu)$ dans ce formalisme.

Solution: D'après la partie précédente, $E(\theta,\mu) = \overline{\mathcal{D}(\lambda,\theta)\mathcal{G}(\lambda,\mu)}$, d'où

$$E(\theta,\mu) = \int \mathcal{D}(\lambda,\theta)\mathcal{G}(\lambda,\mu)\rho(\lambda)d\lambda$$

On définit $S = E(\theta,\mu) - E(\theta,\mu') + E(\theta',\mu) + E(\theta',\mu')$, appelé *signal de Bell.*

21. Montrer que S peut s'écrire sous la forme $S = \int s(\lambda,\theta,\theta',\mu,\mu')\rho(\lambda)d\lambda$, où $s(\lambda,\theta,\theta',\mu,\mu')$ est une fonction que l'on exprimera.

Solution:

$$S = \int \left(\mathcal{D}(\lambda,\theta)\mathcal{G}(\lambda,\mu) - \mathcal{D}(\lambda,\theta)\mathcal{G}(\lambda,\mu') + \mathcal{D}(\lambda,\theta')\mathcal{G}(\lambda,\mu) + \mathcal{D}(\lambda,\theta')\mathcal{G}(\lambda,\mu')\right)\rho(\lambda)d\lambda,$$

d'où la relation demandée, avec

$$s(\lambda,\theta,\theta',\mu,\mu') = \mathcal{D}(\lambda,\theta)\left[\mathcal{G}(\lambda,\mu) - \mathcal{G}(\lambda,\mu')\right] + \mathcal{D}(\lambda,\theta')\left[\mathcal{G}(\lambda,\mu) + \mathcal{G}(\lambda,\mu')\right]$$

22. Quelles sont les valeurs possibles pour s ?

Solution: On sait que $|\mathcal{G}(\lambda,\mu)| = 1$ d'où $\mathcal{G}(\lambda,\mu) = \pm\mathcal{G}(\lambda,\mu')$.

1. Si $G(\lambda,\mu) - G(\lambda,\mu') = 0$, alors $G(\lambda,\mu) + G(\lambda,\mu') = \pm 2$
2. Si $G(\lambda,\mu) + G(\lambda,\mu') = 0$, alors $G(\lambda,\mu) - G(\lambda,\mu') = \pm 2$.

Finalement on voit que s ne peut prendre que les valeurs ± 2.

23. Montrer que S est borné.

Solution: Comme $\int \rho(\lambda)d\lambda = 1$, d'après la question précédente

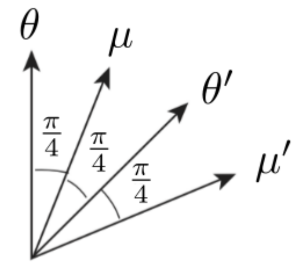
$$\left|\int s(\lambda,\theta,\theta',\mu,\mu')\rho(\lambda)d\lambda\right| \leq 2.$$

D'où l'inégalité de Bell-CHSH

$$-2 \leq S \leq 2$$

L'inégalité obtenue est connue sous le nom d'inégalité de Bell-CHSH (John Bell, John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony, and Richard Holt). Nous avons montré qu'elle est vérifiée dans le cas d'une théorie à variable cachée.

6 Violation des inégalités de Bell



Dans la suite, nous allons montrer que dans le cas d'une théorie sans variable cachée, il existe des angles $(\theta, \theta', \mu, \mu')$ tels que l'inégalité de Bell-CHSH n'est pas satisfaite. Plaçons nous dans la configuration de la figure ci-dessous.

24. Que vaut S dans le formalisme quantique de la section 4 ?

Solution: On a

$$S = \cos(\theta - \mu) - \cos(\theta - \mu') + \cos(\theta' - \mu) + \cos(\theta' - \mu')$$

25. Que vaut S dans la configuration de la figure ci-dessus ?

Solution:

$$\begin{aligned} S &= \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

On trouve

$$S = 2\sqrt{2} > 2.$$

L'inégalité de Bell-CHSH est violée.

26. Comment trancher expérimentalement le débat Einstein/Bohr ?

Solution: Si l'on fait une expérience dans laquelle on mesure S et que l'on trouve que $S > 2$, alors on en déduit qu'il n'y a pas de variable cachée. Cette expérience a été réalisée en 1984 l'équipe d'Alain Aspect avec des photons. Elle a clos le débat entre Eintein et Bohr sur la complétude de la mécanique quantique.