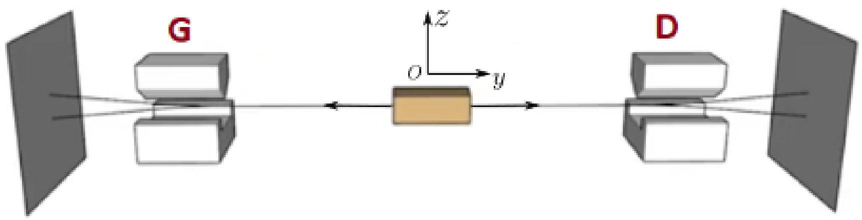
TD11 – Inégalités de Bell



On considère une source d'atomes d'argents capable de générer des paires d'atomes intriqués. L'un des atomes de chaque paire (noté d) est éjecte vers la droite et mesuré par un appareil de Stern et Gerlach (S&G) (D), et l'autre atome de la paire (noté g) est éjecté à gauche et mesuré par un autre appareil de S&G (G). On supposera que le D est légèrement plus proche de la source et effectue sa mesure juste avant G.

1 Même orientation pour D et G

Dans un premier temps les deux S&G sont orientés suivant l'axe Oz. On note $\{|+_{\mathrm{g}}\rangle, |-_{\mathrm{g}}\rangle\}$ et $\{|+_{\mathrm{d}}\rangle, |-_{\mathrm{d}}\rangle\}$ les bases propres des observables associées aux deux S&G.

1. Donner une base de l'espace produit tensoriel $E = E_{\mathrm{g}} \otimes E_{\mathrm{d}}$ associé aux deux atomes d'argent.

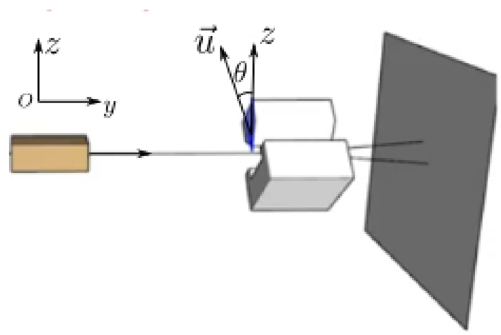
On suppose que l'état intriqué généré par la source d'atomes dans la base propres des observables associées aux deux S&G s'écrit

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| +_{\mathrm{g}} +_{\mathrm{d}}\rangle + | -_{\mathrm{g}} -_{\mathrm{d}}\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + +\rangle + | - -\rangle\right)$$

2. Supposons que D mesure $+\hbar/2$. Quelle est l'état du système après la mesure de D ? Quelle était la probabilité de mesurer $+\hbar/2$?
3. Quelle est alors la probabilité P_{++} de mesurer successivement $+\hbar/2$ avec D et $+\hbar/2$ avec G ?
4. En déduire les autres probabilités P_{--}, P_{+-}, P_{-+}.

On introduit le coefficient de corrélation $C = P_{++} + P_{--} - (P_{+-} + P_{-+})$.

5. Que vaut C dans cette configuration de mesure ? Quelle est la signification de ce résultat ?



2 Mesure dans une base tournée d'un angle θ

Dans le TD 9, nous avons vu que si l'on tourne le S&G suivant un axe dirigé par $\vec{u}$ tourné d'un angle θ par rapport à (Oz), la matrice de l'observable associée au S&G s'écrit dans la base des états propres de $\widehat{S}_z$:

$$(S_u)_{\mathbf{B}_z} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

car dans la paramétrisation choisie dans ce TD, $\phi = 0$. Nous avions également déterminé les vecteurs propres de (S_u) dans la base $\mathbf{B}_z = \{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$|+\rangle_{\vec{u}} = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle \quad (1)$$

$$|-\rangle_{\vec{u}} = \sin\frac{\theta}{2}|+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|-\rangle \quad (2)$$

$$(3)$$

Comme contrairement au TD9, il n'y a besoin que d'un seul angle pour déterminer totalement la direction $\vec{u}$ (car $\phi = 0$), on notera

$$|\pm\rangle_{\vec{u}} \equiv |\pm_\theta\rangle.$$

6. Exprimer les vecteurs de la base $\mathbf{B}_z$ en fonction de ceux de la base $\mathbf{B}_\theta \equiv |\pm_\theta\rangle$.

3 Intrication, changement de base, paradoxe EPR

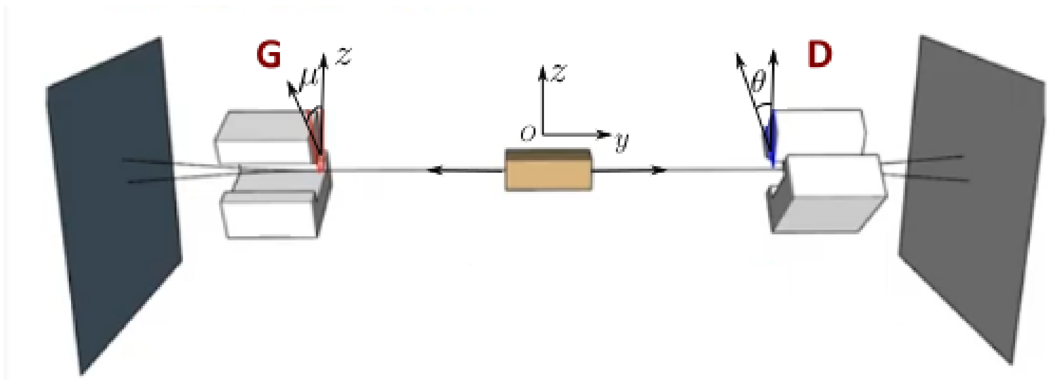
Revenons à la situation de la section 1. On suppose que la source prépare toujours l'état $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)$, où $|\pm\rangle$ sont les états propres des S&G orientés suivant Oz. Par contre les deux S&G ont toujours le même axe, mais celui-ci est tourné d'un angle θ par rapport à Oz.

7. Donner une base de l'espace produit tensoriel E, construite à partir des bases $|\pm_\theta\rangle$.
8. Écrire l'état $|\Psi\rangle$ dans cette base.

9. L'état dans la base tournée d'un angle θ est-il intriqué ?
10. Pourquoi Einstein, Podolsky et Rosen en déduisent que la mécanique quantique est incomplète ?

4 Mesures et corrélations pour des angles différents

On génère toujours le même état initial $|\Psi\rangle$, mais on tourne maintenant les S&G d'un angle différent. On tourne D d'un angle θ et G d'un angle μ.



11. Quelle est la probabilité $P_{++}(\theta, \mu)$ de mesurer la valeur propre $\hbar/2$ avec D, puis de mesurer $\hbar/2$ avec G ? Que valent $P_{--}(\theta, \mu)$, $P_{-+}(\theta, \mu)$, et $P_{+-}(\theta, \mu)$?
12. Que vaut la probabilité $P_+(\theta)$ d'obtenir la mesure $\hbar/2$ sur l'atome de droite indépendamment de la mesure du second atome ? et la probabilité $P_-(\theta)$ d'obtenir $-\hbar/2$?
13. Que vaut la probabilité $P_+(\mu)$ d'obtenir la mesure $\hbar/2$ sur l'atome de gauche indépendamment de la mesure du second atome ? et la probabilité $P_-(\mu)$ d'obtenir $-\hbar/2$?

On introduit la variable aléatoire $\mathcal{D}(\theta)$ qui prend la valeur ± 1, suivant que la mesure de D donne $\pm\hbar/2$.

14. Que vaut $P[\mathcal{D}(\theta) = 1]$ pour $|\Psi\rangle$? et $P[\mathcal{D}(\theta) = -1]$?
15. Quelle est la moyenne statistique (l'espérance) de $\mathcal{D}(\theta)$ notée $\overline{\mathcal{D}(\theta)}$

On introduit de manière similaire $\mathcal{G}(\mu)$ pour les mesures sur le second atome.

16. Que vaut $\overline{\mathcal{G}(\mu)}$?

On définit le coefficient de corrélation $E(\theta, \mu)$ entre les deux variables aléatoires

$$E(\theta, \mu) = \frac{\overline{\mathcal{D}(\theta)\mathcal{G}(\mu)} - \overline{\mathcal{D}(\theta)}\ \overline{\mathcal{G}(\mu)}}{\sqrt{\overline{|\mathcal{D}(\theta)|^2}\ \overline{|\mathcal{G}(\mu)|^2}}}$$

17. Que vaut $E(\theta, \mu)$ pour l'état $|\Psi\rangle$?
18. Expliquer les valeurs prises par le coefficient de corrélation $E(\theta, \mu)$ suivant les valeurs des angles θ et μ (on pourra tracer cette fonction en fonction de $\theta - \mu$).

5 Description à l'aide d'une variable cachée

En fait on peut comprendre ces corrélations sans faire appel à l'intrication. Les résultats prédits par la mécanique quantique pour l'état $|\Psi\rangle$, mesuré selon Oz sont $P_{++} = P_{--} = 1/2$ et $P_{+-} = P{-+} = 0$. Si l'on suppose que 50 % des paires d'atomes sont en fait dans l'état $|++\rangle$ et 50 % des paires d'atomes sont dans l'état $|--\rangle$, on retrouve ces probabilités. Cependant, cet état n'est pas décrit dans le formalisme quantique par un état pur $|\Psi\rangle$ mais par deux états émis aléatoirement. Il est donc nécessaire d'ajouter quelque chose à la théorie pour prendre en compte ces corrélations.

Partant de ce constat Einstein, Podolsky et Rosen, proposent d'ajouter une nouvelle variable à la mécanique quantique qui permet de distinguer entre les types de paires émises. Donnons lui le nom de variable cachée et notons-la λ. Cette variable a les propriétés suivantes :
— elle permet de décrire les corrélations de spin entre les deux atomes. Elle est donc identique pour les deux atomes et change aléatoirement d'une paire à l'autre.
— c'est une variable aléatoire de densité de probabilité $\rho(\lambda)$ telle que $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$.
On introduit les fonctions $\mathcal{D}(\lambda, \theta)$ et $\mathcal{G}(\lambda, \mu)$ pour décrire les mesures de spin du premier atome selon θ et du second atome selon μ. Ces fonctions prennent les valeurs ± 1.

19. Justifier la relation suivante :

$$\int \mathcal{D}(\lambda, \theta)\rho(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \int \mathcal{G}(\lambda, \mu)\rho(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

20. Donner $E(\theta, \mu)$ dans ce formalisme.

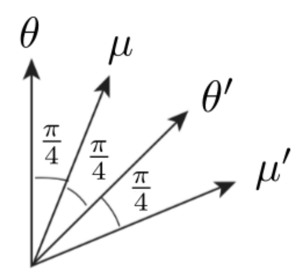
On définit $S = E(\theta, \mu) - E(\theta, \mu') + E(\theta', \mu) + E(\theta', \mu')$, appelé *signal de Bell.*

21. Montrer que S peut s'écrire sous la forme $S = \int s(\lambda, \theta, \theta', \mu, \mu')\rho(\lambda) d\lambda$, où $s(\lambda, \theta, \theta', \mu, \mu')$ est une fonction que l'on exprimera.
22. Quelles sont les valeurs possibles pour s ?
23. Montrer que S est borné.

L'inégalité obtenue est connue sous le nom d'inégalité de Bell-CHSH (John Bell, John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony, and Richard Holt). Nous avons montré qu'elle est vérifiée dans le cas d'une théorie à variable cachée.

6 Violation des inégalités de Bell

Dans la suite, nous allons montrer que dans le cas d'une théorie sans variable cachée, il existe des angles $(\theta, \theta', \mu, \mu')$ tels que l'inégalité de Bell-CHSH n'est pas satisfaite. Plaçons nous dans la configuration de la figure ci-dessous.



24. Que vaut S dans le formalisme quantique de la section 4 ?
25. Que vaut S dans la configuration de la figure ci-dessus ?
26. Comment trancher expérimentalement le débat Einstein/Bohr ?