LU3PY101
Physique Quantique 1
2023-2024

TD 12 - Portes quantiques – Corrigé –

1 Portes logiques et base de Bell

1.1 Portes logiques à un qubit

On considère un qubit décrit par l'espace des états $\mathcal{E}$. Une base de cet espace est $\mathcal{B}_z \equiv \{|0\rangle, |1\rangle\}$. On définit les opérations X (bit-flip), Z (phase-flip) et H (Hadamard) caractérisées par leur matrice dans la base $\mathcal{B}_z$:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{et } H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On note $|+\rangle$ et $|-\rangle$ les vecteurs propres de X. On rappelle leur expression dans la base $\mathcal{B}_z$:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$
$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle).$$

1. Écrire la matrice qui représente l'opération ZX dans les bases $\mathcal{B}_x$ et $\mathcal{B}_z$.

Solution: On a,

$$(ZX)_{\mathcal{B}_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, la matrice de passage de $\mathcal{B}_z$ à $\mathcal{B}_x$ est H, qui a la propriété d'être sa propre inverse : $H = H^{-1}$. Finalement,

$$(ZX)_{\mathcal{B}_x} = H(ZX)_{\mathcal{B}_z} H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer qu'une porte Hadamard est une opération unitaire.

Solution: $H = H^{-1}$, or on remarque que H est également égale à sa transconjuguée : $H = H^{\dagger}$. Donc $H^{-1} = H^{\dagger}$: H est une opération unitaire.

1.2 Portes logiques à deux qubits

On considère maintenant un système composé de deux qubit associés respectivement aux espaces des états $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. L'état du système global appartient à l'espace produit tensoriel noté $\mathcal{E}$. On notera $|00\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$. Soit $\mathcal{B}_\mathcal{E} : \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$. On souhaite décrire l'action de la porte $H_1 = H \otimes I$, où H agit dans l'espace $\mathcal{E}_1$ et I est l'identité agissant dans l'espace $\mathcal{E}_2$.

3. Donner la matrice représentant H_1 dans la base $\mathcal{B}_\mathcal{E}$.

Solution: On a

$$H \otimes I|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle + |10\rangle\right).$$

Les éléments de matrice de la première colonne de H_1 sont obtenus en projetant cette expression sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}_\mathcal{E}$. La première colonne est donc $1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0$. Ensuite on détermine la seconde colonne en calculant

$$H \otimes I|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|01\rangle + |11\rangle\right).$$

En projetant sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}_\mathcal{E}$, on obtient les coefficients $0, 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}$. On procède de la même manière pour les deux dernières colonnes. Au final, on obtient la matrice de H_1 dans la base $\mathcal{B}_\mathcal{E}$:

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour les aficionados, notez qu'en fait on peut calculer directement le produit tensoriel de deux matrices de la manière suivante. La matrice de $A \otimes B$ est la matrice par blocs $(a_{ij}B)$. Par exemple si A et B sont des matrices 2x2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, la matrice du produit tensoriel $A \otimes B$ est

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix}.$$

La matrice de H_{a1} est en effet composée de quatre blocs : l'identité de dimension 2 en haut à gauche, en haut à droite et en bas à gauche, et l'opposé de l'identité de dimension 2 en bas à droite.

4. Donner également la représentation de $H_2 = I \otimes H$ dans la base $\mathcal{B}_\mathcal{E}$.

Solution: On trouve de même que

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère maintenant que le système est dans l'état $|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.

5. Quels sont les résultats possibles lors de la mesure du 1er qubit ? Donner les états obtenus après la mesure. Les états obtenus sont-ils intriqués ?

Solution: On peut obtenir les valeurs propres ± 1. On projette soit dans l'état $|00\rangle$, soit dans l'état $|11\rangle$, et ces états ne sont pas intriqués. Une mesure du premier qubit projette donc immédiatement le second qubit sur l'état $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Ce comportement est très différent d'un état non intriqué. Par exemple lors d'une mesure sur le premier qubit d'un système dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |00\rangle)$, on obtient forcément la valeur propre -1 correspondant à l'état $|0\rangle$, et cela ne dit rien sur l'état du second qubit qui peut toujours être $|0\rangle$ ou $|1\rangle$.

6. Décomposer l'état $|B_{00}\rangle$ dans la base $\{|{+}{+}\rangle, |{+}{-}\rangle, |{-}{+}\rangle, |{-}{-}\rangle\}$. Conclusion ?

Solution:

$$\begin{aligned}
|B_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}[|+\rangle_1 + |-\rangle_1][|+\rangle_2 + |-\rangle_2] + [|+\rangle_1 - |-\rangle_1][|+\rangle_2 - |-\rangle_2] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[|{+}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle].
\end{aligned}$$

$|B_{00}\rangle$ est donc intriqué dans les deux bases. La propriété d'intrication ne dépend pas de la base : un état qui est intriqué dans une base l'est dans toute autre base.

7. Appliquer à l'état $|B_{00}\rangle$ les 4 opérations I $\otimes$ I , $X\otimes$ I, $Z\otimes$ I, et $ZX\otimes$ I, où I est l'identié de dimension 2.

Solution:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} \otimes \mathrm{I}|B_{00}\rangle &= |\phi_{00}\rangle \\
X \otimes \mathrm{I}|B_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|10\rangle + |01\rangle\right] \\
Z \otimes \mathrm{I}|B_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|00\rangle - |11\rangle\right] \\
ZX \otimes \mathrm{I}|B_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-|10\rangle + |01\rangle\right],
\end{aligned}$$

en utilisant le résultat de la question 1, pour l'expression de la matrice ZX.

8. Montrer que les 4 états obtenus forment un base de $\mathcal{E}$. On appelle cette base Base de Bell.

Solution: Ils sont deux à deux orthogonaux. Ils forment une famille libre de quatre vecteurs d'un espace vectoriel de dimension 4, ils forment donc une base de $\mathcal{E}$.

9. Quelle est la particulartité de cette base ?

Solution: Tous les kets de la base sont intriqués.

La matrice de l'opération (la porte logique) Controlled-NOT dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ est

$$\mathrm{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Donner la table de vérité de cette porte.

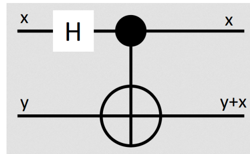
Solution:

in	*out*
$\|00\rangle$	$\|00\rangle$
$\|01\rangle$	$\|01\rangle$
$\|10\rangle$	$\|11\rangle$
$\|11\rangle$	$\|10\rangle$

On cherche à générer la base de Bell à partir de $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$. Pour ce faire, on applique une porte Hadamard sur le premier qubit suivi d'une porte C-NOT (le 1er qubit étant le bit de contrôle).

11. Donner le schéma de ce circuit et sa représentation matricielle.

Solution:



La matrice de cette opération est obtenue en faisant le produit de la matrice de la porte CNOT avec celle de $H_1 \otimes \mathrm{I}$. Attention à l'ordre : on applique d'abord la porte Hadamard puis la CNOT. D'où

$$\mathrm{CNOT} \times (H_{a_1} \otimes \mathrm{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Quels sont les états obtenus si l'on applique ce circuit sur les 4 états de la base $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$?

Solution: On a,

$$\mathrm{CNOT} \times (H_{a_1} \otimes \mathrm{I})|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{aligned} \mathrm{CNOT} \times (H \otimes \mathrm{I})|00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle + |11\rangle] \\ \mathrm{CNOT} \times (H \otimes \mathrm{I})|01\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|10\rangle + |01\rangle] \\ \mathrm{CNOT} \times (H \otimes \mathrm{I})|10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle - |11\rangle] \\ \mathrm{CNOT} \times (H \otimes \mathrm{I})|11\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|01\rangle - |10\rangle] \end{aligned}$$

Ce circuit permet donc de générer les états de Bell à partir des états de la base computationnelle $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$.