LU3PY101
Physique Quantique 1
2023-2024

TD 12 - Portes quantiques

1 Portes logiques et base de Bell

1.1 Portes logiques à un qubit

On considère un qubit décrit par l'espace des états $\mathcal{E}$. Une base de cet espace est $\mathcal{B}_z \equiv \{|0\rangle, |1\rangle\}$. On définit les opérations X (bit-flip), Z (phase-flip) et H (Hadamard) caractérisées par leur matrice dans la base $\mathcal{B}_z$:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{et } H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On note $|+\rangle$ et $|-\rangle$ les vecteurs propres de X. On rappelle leur expression dans la base $\mathcal{B}_z$:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$
$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle).$$

1. Écrire la matrice qui représente l'opération ZX dans les bases $\mathcal{B}_x$ et $\mathcal{B}_z$.
2. Montrer qu'une porte Hadamard est une opération unitaire.

1.2 Portes logiques à deux qubits

On considère maintenant un système composé de deux qubit associés respectivement aux espaces des états $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. L'état du système global appartient à l'espace produit tensoriel noté $\mathcal{E}$. On notera $|00\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$. Soit $\mathcal{B}_\mathcal{E}$: $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$. On souhaite décrire l'action de la porte $H_1 = H \otimes I$, où H agit dans l'espace $\mathcal{E}_1$ et I est l'identité agissant dans l'espace $\mathcal{E}_2$.

3. Donner la matrice représentant H_1 dans la base $\mathcal{B}_\mathcal{E}$.
4. Donner également la représentation de $H_2 = I \otimes H$ dans la base $\mathcal{B}_\mathcal{E}$.

On considère maintenant que le système est dans l'état $|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$.

5. Quels sont les résultats possibles lors de la mesure du 1er qubit ? Donner les états obtenus après la mesure. Les états obtenus sont-ils intriqués ?
6. Décomposer l'état $|B_{00}\rangle$ dans la base $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$. Conclusion ?
7. Appliquer à l'état $|B_{00}\rangle$ les 4 opérations I $\otimes$ I , $X\otimes$ I, $Z\otimes$ I, et $ZX\otimes$ I, où I est l'identié de dimension 2.
8. Montrer que les 4 états obtenus forment un base de $\mathcal{E}$. On appelle cette base Base de Bell.

9. Quelle est la particulartité de cette base ?
   La matrice de l'opération (la porte logique) Controlled-NOT dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ est

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Donner la table de vérité de cette porte.

On cherche à générer la base de Bell à partir de $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$. Pour ce faire, on applique une porte Hadamard sur le premier qubit suivi d'une porte C-NOT (le 1er qubit étant le bit de contrôle).

11. Donner le schéma de ce circuit et sa représentation matricielle.
12. Quels sont les états obtenus si l'on applique ce circuit sur les 4 états de la base $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$?