LU3PY101
Physique Quantique 1
2023-2024

TD 11 - Oscillateurs harmoniques quantiques couplés – Corrigé –

1 Prolégomènes : produit tensoriel

Soient deux espaces de Hilbert $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de dimension respectives 3 et 2, ayant pour bases respectives $B_{\mathcal{F}}$ et $B_{\mathcal{G}}$. Soient $\widehat{U}$ et $\widehat{V}$ deux observables formant un ECOC de $\mathcal{F}$ et $\widehat{W}$ une observable formant un ECOC de $\mathcal{G}$. On donne les matrices représentant les différentes observables :

$$\left(\widehat{U}\right)_{B_{\mathcal{F}}} = u \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad \left(\widehat{V}\right)_{B_{\mathcal{F}}} = v \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\widehat{W}\right)_{B_{\mathcal{G}}} = w \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$$

1. Former une base de l'espace produit tensoriel $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$? Quelle est la dimension de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$?

> **Solution:** $B_{\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}}$ est obtenue en combinant de toutes les manières possibles les vecteurs des bases $B_{\mathcal{F}}$ et $B_{\mathcal{G}}$.
>
> $$B_{\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}} \equiv \{|u, 2v\rangle\,|w\rangle\,, |u, 2v\rangle\,|2w\rangle\,, |u, v\rangle\,|w\rangle\,, |u, v\rangle\,|2w\rangle\,, |2u, v\rangle\,|w\rangle\,, |2u, v\rangle\,|2w\rangle\}$$
>
> La dimension de $B_{\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}}$ s'obtient en comptant le nombre de vecteurs de la base ainsi obtenue, soient 6. On aurait pu l'obtenir directement en calculant le produit des dimensions des deux espaces $B_{\mathcal{F}}$ et $B_{\mathcal{G}}$, soit $3 \times 2 = 6$.

Soient $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u, 2v\rangle + |2u, v\rangle\right)$ un ket de $\mathcal{F}$ et $|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|w\rangle - i|2w\rangle\right)$ un ket de $\mathcal{G}$.

2. Quelle est l'expression du produit tensoriel entre état $|x\rangle \otimes |y\rangle$ développé sur la base $B_{\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}}$?

> **Solution:** Notez qu'en ce qui concerne le produit tensoriel entre états, on omet souvent le symbole « $\otimes$ ».
>
> $$\begin{aligned} |x\rangle \otimes |y\rangle \equiv |x\rangle|y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u, 2v\rangle + |2u, v\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|w\rangle - i|2w\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|u, 2v\rangle|w\rangle - i|u, 2v\rangle|2w\rangle + |2u, v\rangle|w\rangle - i|2u, v\rangle|2w\rangle\right) \end{aligned}$$

3. Déterminer la norme du ket $|x\rangle \otimes |y\rangle$.

Solution: $(\langle x| \otimes \langle y|)(|x\rangle \otimes |y\rangle) = \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle = 1$

4. Déterminer l'action du produit tensoriel d'opérateurs $\widehat{U} \otimes \widehat{W}$ sur le ket $|x\rangle \otimes |y\rangle$.

Solution: Chaque opérateur agit sur le ket de l'espace auquel il est associé.

$$\widehat{U} \otimes \widehat{W}|x\rangle \otimes |y\rangle = \widehat{U}|x\rangle \otimes \widehat{W}|y\rangle$$

On peut donc soit refaire le calcul depuis le départ, soit écrire le résultat directement à partir du résultat de la question précédente :

$$\widehat{U} \otimes \widehat{W}|x\rangle|y\rangle = \frac{1}{2}\left(uw\,|u, 2v\rangle\,|w\rangle - 2iuw\,|u, 2v\rangle\,|2w\rangle + 2uw\,|2u, v\rangle\,|w\rangle - 4iuw\,|2u, v\rangle\,|2w\rangle\right)$$

Remarque : ici le calcul est simple car les opérateurs sont diagonaux. Dans le cas général il peut être utile de savoir calculer la matrice représentant le produit tensoriel de deux opérateurs (cf. cours)

2 Oscillateurs harmoniques quantiques couplés

Soient deux particules de masses identiques m soumises au même potentiel harmonique à une dimension. On note O_x, l'axe de déplacement des particules, x_1 et x_2 leurs positions et p_1 et p_2 leurs impulsions. On note ω la pulsation caractéristique du puits de potentiel harmonique.
Dans un premier temps on considère qu'il n'y a pas de couplage entre les deux oscillateurs harmoniques (OH), c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'interaction entre les deux particules : les deux OH sont indépendants. On note ε_1 et ε_2 les espaces de Hilbert associés à chacun des deux OH. Les kets du système composé des deux OH appartiennent à l'espace produit tensoriel $\varepsilon = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$. On note $\widehat{H}_1$ et $\widehat{H}_2$ les hamiltoniens des OH dans leurs espaces de Hilbert respectifs. L'hamiltonien total du système non couplé est donc $\widehat{H}_0 = \widehat{H}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2 + \hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \widehat{H}_2$. On note $\hat{\mathbb{1}} \equiv \hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2$ l'opérateur identité dans ε.

Enfin, on note $\hat{a}_1$ (agissant dans ε_1) et $\hat{a}_2$ (agissant dans ε_2) les opérateurs d'annihilation associés à ces deux oscillateurs harmoniques et $|n_1\rangle$ et $|n_2\rangle$ les états nombres des OH. On notera $|n_1, n_2\rangle \equiv |n_1\rangle|n_2\rangle \equiv |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$ l'état produit tensoriel des états nombres $|n_1\rangle$ et $|n_2\rangle$.

OH non couplés

5. Exprimer $\widehat{H}_1$ et $\widehat{H}_2$ en fonction des coordonnées dimensionnées ($\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$).

Solution:

$$\widehat{H}_1 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_1^2$$
$$\widehat{H}_2 = \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_2^2$$

6. Écrire $\widehat{H}_1$ et $\widehat{H}_2$ en utilisant des coordonnées adimensionnées. On notera avec des majuscules les variables adimensionnées. On précisera l'expression de la longueur et de l'impulsion caractéristiques du problème.

Solution:

$$\widehat{H}_1 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\widehat{X}_1^2 + \widehat{P}_1^2\right)$$
$$\widehat{H}_2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\widehat{X}_2^2 + \widehat{P}_2^2\right)$$

Longueur caractéristique $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, impulsion caractéristique $\sqrt{\hbar m\omega}$.

7. Donner sans calcul l'expression de $\widehat{H}_0$ en fonction des opérateurs nombre $\widehat{N}_1$ et $\widehat{N}_2$. Quel est le spectre (ensemble des valeurs propres) de ces deux opérateurs *(démonstration non demandée)* ?

Solution: $\widehat{H} = \hbar\omega\left(\widehat{N}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2 + \hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \widehat{N}_2 + \hat{\mathbb{1}}\right)$ Le spectre de $\widehat{N}_1$ et $\widehat{N}_2$ est l'ensemble $\mathbb{N}$.

Dans la suite on pose $\widehat{N} = \widehat{N}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2 + \hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \widehat{N}_2$.

8. Donner sans calcul les énergies propres E_{n_1,n_2} du problème. Quel est le degré de dégénérescence des niveaux d'énergie du système de 2 OH ?

Solution: $E_{n_1,n_2} = \hbar\omega\,(n_1 + n_2 + 1)$, avec $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$. $d(n_1, n_2) = 1 + n_1 + n_2$: pour chaque entier n, il y a $1 + n_1 + n_2$ couples n_1, n_2 qui vérifient l'égalité $n_1 + n_2 = n$.

9. Quels sont les états stationnaires du système composés des deux OH ?

Solution: Les $|n_1, n_2\rangle \in \varepsilon$ avec $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$. Le vérifier en appliquant l'hamiltonien.

OH couplés

On ajoute maintenant le terme de couplage

$$\widehat{V} = \hbar g\left[\left(\hat{a}_1^\dagger \otimes \hat{\mathbb{1}}_2\right)\left(\hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \hat{a}_2\right) + \left(\hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \hat{a}_2^\dagger\right)\left(\hat{a}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2\right)\right] \equiv \hbar g\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger\right)$$

à l'hamiltonien. Cet hamiltonien inclut deux processus : création d'une excitation dans l'OH1 et annihilation d'une excitation dans l'OH2, et inversement. **On utilise ici et dans toute la suite les raccourcis de notation :** $\hat{a}_1 \equiv \hat{a}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2$, $\hat{a}_2 \equiv \hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \hat{a}_2$, $\widehat{N}_1 \equiv \widehat{N}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2$, etc. Il suffit donc de se souvenir que les opérateurs avec un indice 1 agissent dans ε_1 et ceux avec un indice 2 dans ε_2.
L'hamiltonien du système couplé est donc $\boxed{\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}}$.

On introduit les opérateurs $\hat{a}_p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_1 + \hat{a}_2\right)$ et $\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_1 - \hat{a}_2\right)$.

10. Exprimer $\widehat{H}$ en fonction de ces opérateurs.

Solution: On substitue

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_p + \hat{a}_m\right) \quad \hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_p - \hat{a}_m\right)$$

dans l'hamiltonien, après simplification on trouve

$$\widehat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p + \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m + \hat{\mathbb{1}}\right) + \hbar g\left(\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p - \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m\right) = \hbar\omega\hat{\mathbb{1}} + \hbar(\omega+g)\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p + \hbar(\omega-g)\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m,$$

c'est-à-dire la somme de deux oscillateurs harmoniques indépendants.

11. Que vaut le commutateur $[\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger]$?

Solution: $\hat{a}_1 \equiv \hat{a}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2$ et $\hat{a}_2 \equiv \hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \hat{a}_2$, donc $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$ commutent. Ou plus simplement, ils n'agissent pas dans le même espace donc ils commutent. D'où

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger] = \frac{1}{2}[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] \otimes \hat{\mathbb{1}}_2 + \frac{1}{2}\hat{\mathbb{1}}_1 \otimes [\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}$$

De même, on peut montrer que $[\hat{a}_m, \hat{a}_m^\dagger]$ a la même valeur, et que tous les autres commutateurs possibles entre $\hat{a}_m$, $\hat{a}_m^\dagger$, $\hat{a}_p$ et $\hat{a}_p^\dagger$ sont nuls.

12. En vous appuyant sur le cours *(aucune démonstration demandée)*, expliquer ce qui permet d'affirmer que le spectre des opérateurs $\widehat{N}_p = \hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p$ et $\widehat{N}_m = \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m$ dans le cas du système couplé est le même que celui de $\widehat{N}_1$ et $\widehat{N}_2$ dans le cas des OH non couplés.

Solution: On a montré dans le cours que pour un OH 1D, le spectre de $\widehat{N}_1$ (même argument pour $\widehat{N}_2$) découle de la relation de commutation entre $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_1^\dagger$. Ici dans le cas couplé, on a la même relation de commutation entre $\hat{a}_{p,m}$ et $\hat{a}_{p,m}^\dagger$ qu'entre $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_1^\dagger$, donc on a le même spectre : l'ensemble $\mathbb{N}$.

Dans la suite on note n_p et n_m les valeurs propres des opérateurs $\widehat{N}_p$ et $\widehat{N}_m$, respectivement. De plus, on se place dans le cas où $0 < g < \omega$ et où $\nexists(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tels que $q\omega = rg$.

13. Quelles sont alors les énergies propres du système couplé, ainsi que leur degré de dégénérescence ?

Solution: $E_{n_m,n_p} = \hbar\omega + \hbar(\omega+g)n_p + \hbar(\omega-g)n_m$, avec $(n_p, n_m) \in \mathbb{N}^2$. Le degré de dégénérescence est $d(n_p, n_m) = 1$. On a levé les dégénérescence en ajoutant le couplage.

On remarque que l'état fondamental $|n_p\!=\!0, n_m\!=\!0\rangle$ est en fait également l'état fondamental du système non couplé $|n_1\!=\!0, n_2\!=\!0\rangle$.

14. Exprimer le premier état excité du système couplé sur la base des états propres du système non couplé $\{|n_1, n_2\rangle\}$.

Solution: Pour atteindre le premier état excité, il faut appliquer $\hat{a}_m^\dagger$ (qui ajoute l'énergie $\hbar(\omega - g)$). Le premier état excité est donc donné par

$$\hat{a}_m^\dagger|n_1 = 0, n_2 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_2^\dagger)|n_1\!=\!0, n_2\!=\!0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n_1\!=\!1, n_2\!=\!0\rangle - |n_1\!=\!0, n_2\!=\!1\rangle\right)$$

15. Exprimer le second état excité du système couplé sur la base des états propres du système non couplé $\{|n_1, n_2\rangle\}$.

Solution: Pour atteindre le second état excité, il faut appliquer $\hat{a}_p^\dagger$ (ajoute l'énergie $\hbar(\omega + g)$). Le second état excité est donc donné par

$$\hat{a}_p^\dagger|n_1 = 0, n_2 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger)|n_1\!=\!0, n_2\!=\!0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n_1\!=\!1, n_2\!=\!0\rangle + |n_1\!=\!0, n_2\!=\!1\rangle\right)$$