

TD 11 - OSCILLATEURS HARMONIQUES QUANTIQUES COUPLÉS

1 Prolégomènes : produit tensoriel

Soient deux espaces de Hilbert \mathcal{F} et \mathcal{G} de dimension respectives 3 et 2, ayant pour bases respectives $B_{\mathcal{F}}$ et $B_{\mathcal{G}}$. Soient \hat{U} et \hat{V} deux observables formant un ECOOC de \mathcal{F} et \hat{W} une observable formant un ECOOC de \mathcal{G} . On donne les matrices représentant les différentes observables :

$$\left(\hat{U}\right)_{B_{\mathcal{F}}} = u \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad \left(\hat{V}\right)_{B_{\mathcal{F}}} = v \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\hat{W}\right)_{B_{\mathcal{G}}} = w \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$$

1. Former une base de l'espace produit tensoriel $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$? Quelle est la dimension de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$?
Soient $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u, 2v\rangle + |2u, v\rangle)$ un ket de \mathcal{F} et $|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|w\rangle - i|2w\rangle)$ un ket de \mathcal{G} .
2. Quelle est l'expression du produit tensoriel entre état $|x\rangle \otimes |y\rangle$ développé sur la base $B_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}}$?
3. Déterminer la norme du ket $|x\rangle \otimes |y\rangle$.
4. Déterminer l'action du produit tensoriel d'opérateurs $\hat{U} \otimes \hat{W}$ sur le ket $|x\rangle \otimes |y\rangle$.

2 Oscillateurs harmoniques quantiques couplés

Soient deux particules de masses identiques m soumises au même potentiel harmonique à une dimension. On note O_x , l'axe de déplacement des particules, x_1 et x_2 leurs positions et p_1 et p_2 leurs impulsions. On note ω la pulsation caractéristique du puits de potentiel harmonique.

Dans un premier temps on considère qu'il n'y a pas de couplage entre les deux oscillateurs harmoniques (OH), c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'interaction entre les deux particules : les deux OH sont indépendants. On note ε_1 et ε_2 les espaces de Hilbert associés à chacun des deux OH. Les kets du système composé des deux OH appartiennent à l'espace produit tensoriel $\varepsilon = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$. On note \hat{H}_1 et \hat{H}_2 les hamiltoniens des OH dans leurs espaces de Hilbert respectifs. L'hamiltonien total du système non couplé est donc $\hat{H}_0 = \hat{H}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2 + \hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \hat{H}_2$. On note $\hat{\mathbb{1}} \equiv \hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2$ l'opérateur identité dans ε .

Enfin, on note \hat{a}_1 (agissant dans ε_1) et \hat{a}_2 (agissant dans ε_2) les opérateurs d'annihilation associés à ces deux oscillateurs harmoniques et $|n_1\rangle$ et $|n_2\rangle$ les états nombres des OH. On notera $|n_1, n_2\rangle \equiv |n_1\rangle|n_2\rangle \equiv |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$ l'état produit tensoriel des états nombres $|n_1\rangle$ et $|n_2\rangle$.

OH non couplés

5. Exprimer \hat{H}_1 et \hat{H}_2 en fonction des coordonnées dimensionnées $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2)$.

6. Écrire \hat{H}_1 et \hat{H}_2 en utilisant des coordonnées adimensionnées. On notera avec des majuscules les variables adimensionnées. On précisera l'expression de la longueur et de l'impulsion caractéristiques du problème.
7. Donner sans calcul l'expression de \hat{H}_0 en fonction des opérateurs nombre \hat{N}_1 et \hat{N}_2 . Quel est le spectre (ensemble des valeurs propres) de ces deux opérateurs (*démonstration non demandée*)?

Dans la suite on pose $\hat{N} = \hat{N}_1 \otimes \hat{1}_2 + \hat{1}_1 \otimes \hat{N}_2$.

8. Donner sans calcul les énergies propres E_{n_1, n_2} du problème. Quel est le degré de dégénérescence des niveaux d'énergie du système de 2 OH ?
9. Quels sont les états stationnaires du système composés des deux OH ?

OH couplés

On ajoute maintenant le terme de couplage

$$\hat{V} = \hbar g \left[\left(\hat{a}_1^\dagger \otimes \hat{1}_2 \right) \left(\hat{1}_1 \otimes \hat{a}_2 \right) + \left(\hat{1}_1 \otimes \hat{a}_2^\dagger \right) \left(\hat{a}_1 \otimes \hat{1}_2 \right) \right] \equiv \hbar g \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right)$$

à l'hamiltonien. Cet hamiltonien inclut deux processus : création d'une excitation dans l'OH1 et annihilation d'une excitation dans l'OH2, et inversement. **On utilise ici et dans toute la suite les raccourcis de notation** : $\hat{a}_1 \equiv \hat{a}_1 \otimes \hat{1}_2$, $\hat{a}_2 \equiv \hat{1}_1 \otimes \hat{a}_2$, $\hat{N}_1 \equiv \hat{N}_1 \otimes \hat{1}_2$, etc. Il suffit donc de se souvenir que les opérateurs avec un indice 1 agissent dans ε_1 et ceux avec un indice 2 dans ε_2 .

L'hamiltonien du système couplé est donc $\boxed{\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}}$.

On introduit les opérateurs $\hat{a}_p = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 + \hat{a}_2)$ et $\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 - \hat{a}_2)$.

10. Exprimer \hat{H} en fonction de ces opérateurs.
11. Que vaut le commutateur $[\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger]$?

De même, on peut montrer que $[\hat{a}_m, \hat{a}_m^\dagger]$ a la même valeur, et que tous les autres commutateurs possibles entre \hat{a}_m , \hat{a}_m^\dagger , \hat{a}_p et \hat{a}_p^\dagger sont nuls.

12. En vous appuyant sur le cours (*aucune démonstration demandée*), expliquer ce qui permet d'affirmer que le spectre des opérateurs $\hat{N}_p = \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p$ et $\hat{N}_m = \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m$ dans le cas du système couplé est le même que celui de \hat{N}_1 et \hat{N}_2 dans le cas des OH non couplés.

Dans la suite on note n_p et n_m les valeurs propres des opérateurs \hat{N}_p et \hat{N}_m , respectivement. De plus, on se place dans le cas où $0 < g < \omega$ et où $\#(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tels que $q\omega = rg$.

13. Quelles sont alors les énergies propres du système couplé, ainsi que leur degré de dégénérescence ?
On remarque que l'état fondamental $|n_p=0, n_m=0\rangle$ est en fait également l'état fondamental du système non couplé $|n_1=0, n_2=0\rangle$.
14. Exprimer le premier état excité du système couplé sur la base des états propres du système non couplé $\{|n_1, n_2\rangle\}$.
15. Exprimer le second état excité du système couplé sur la base des états propres du système non couplé $\{|n_1, n_2\rangle\}$.