LU3PY101
Physique Quantique 1
2023-2024

TD10 – Résonance magnétique nucléaire

1 Résonance magnétique nucléaire

La RMN est une technique puissante qui permet de sonder la matière. De sa découverte et son observation en 1938 au développement de techniques de mise en œuvre par plusieurs scientifiques ont obtenus le prix Nobel dont Isidor Rabi, Felix Bloch, Edward Purcell, Richard Ernst, Kurt Wüthrich, Paul Lauterbur et Peter Mansfield. L'application la plus connue du grand public est l'imagerie du corps humain (IRM), mais il y a en fait de nombreuses autres applications : informatique quantique, géophysique, biologie structurale, chimie organique...
On considère une particule de charge électrique nulle et de spin 1/2 soumise à un champ magnétique statique B_0 suivant la direction $\vec{u}_z$ ainsi qu'à un champ magnétique $B_1 \cos(\omega t)\vec{u}_x + B_1 \sin(\omega t)\vec{u}_y$, oscillant dans le plan xOy. On note γ le rapport gyromagnétique.

1. Quelle relation lie le moment magnétique $\widehat{\vec{\mathcal{M}}}$ et le spin $\widehat{\vec{S}}$ de la particule ?
2. Exprimer l'hamiltonien d'interaction $\widehat{H}$ entre la particule et le champ magnétique, en fonction des composantes du spin.

Dans la suite on introduira les fréquences angulaires $\omega_0 = -\gamma B_0$ et $\omega_1 = -\gamma B_1$.

3. Quelle est la matrice de l'hamiltonien dans la base $\mathcal{B}_z \equiv \{|+\rangle, |-\rangle\}$ des états propres de $\widehat{S}_z$?

On suppose dans un premier temps que $B_1 = 0$.

4. Quels sont les états stationnaires du système ? Expliquer comment s'y prendre pour exercer une force sur les atomes en utilisant le champ magnétique.

On suppose maintenant que $B_1 \neq 0$. On décompose l'état du système à un instant t sur la base $\mathcal{B}_z$: $|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|+\rangle + \beta(t)|-\rangle$.

5. Donner les équations différentielles d'évolution des coefficients $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

Pour s'affranchir de la dépendance temporelle du hamiltonien, on passe ensuite dans le référentiel tournant à ω en effectuant le changement de variable

$$\gamma(t) = \alpha(t)e^{i\omega t/2}$$
$$\delta(t) = \beta(t)e^{-i\omega t/2}$$

6. Quel est alors le système d'équations différentielles vérifié par $\gamma(t)$ et $\delta(t)$?

7. Quel est l'hamiltonien $\widehat{\mathcal{H}}$ décrivant l'évolution du système dans le référentiel tournant ?

On introduit la fréquence angulaire $\Omega = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}$, et le paramètre θ, tel que $\tan\theta = \frac{\omega_1}{\omega_0 - \omega}$.

8. Déterminer les énergies propres $E_\pm$, ainsi que les vecteurs propres $\{|+\rangle_{\text{rt}}, |-\rangle_{\text{rt}}\}$, associés (« rt » signifiant *référentiel tournant*).
9. Donner l'expression générale de l'état $|\Psi(t)\rangle_{\text{rt}}$ du système à un instant t, dans la base $\{|+\rangle_{\text{rt}}, |-\rangle_{\text{rt}}\}$.

Supposons que le système soit initialement dans l'état $|+\rangle$.

10. Que valent $\gamma(0)$ et $\delta(0)$? En déduire l'expression de l'état $|\Psi(t)\rangle_{\text{rt}}$ du système à un instant t, dans la base $\{|+\rangle_{\text{rt}}, |-\rangle_{\text{rt}}\}$
11. Exprimer le résultat de la question précédente dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.
12. Sortir du référentiel tournant à ω et exprimer la solution pour $|\Psi(t)\rangle$ dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ (trouver $\alpha(t)$ et $\beta(t)$).
13. Quelle est la probabilité $P(t)$ de mesurer le système dans l'état $|-\rangle$ au cours du temps en fonction de ω_1 et Ω ?
14. Tracer l'enveloppe de $P(t)$ en fonction de ω. Comment s'appelle cette fonction ?
15. Quelle fréquence ω faut-il utiliser pour que le système oscille périodiquement entre les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$? Comment se nomment ces oscillations ?
16. Combien de temps faut-il au système pour passer de l'état $|+\rangle$ à l'état $|-\rangle$.