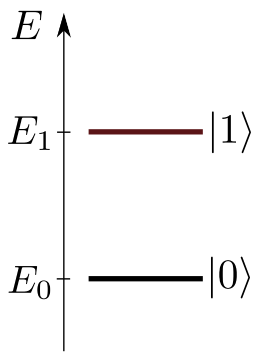
Chapitre 11

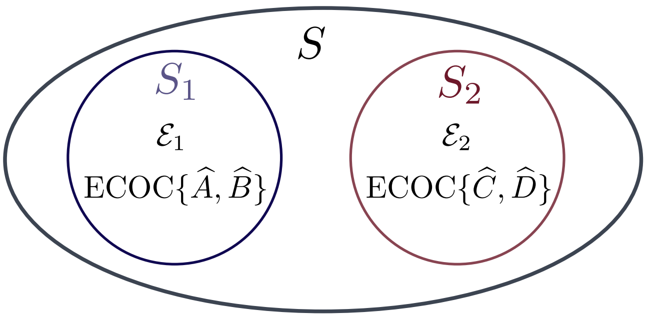
Qubit et intrication

On appelle qubit (*quantum bit*) un système à deux niveaux d'énergie non dégénérés. Le terme qubit est employé dans le domaine de l'*information quantique*, qui est une extension de la théorie de l'information classique de Shannon, qui vise à manipuler des systèmes quantiques pour réaliser des protocoles de manipulation de l'information : cryptographie, transport d'information, traitement de l'information, calcul, etc. Au bit classique, qui peut valoir 0 ou 1, est substitué un qubit qui a deux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ d'énergie différentes [1]. En physique quantique, deux ressources essentielles peuvent être exploitées dans ces protocoles : la possibilité de créer des superpositions d'états, et l'*intrication*. Dans ce chapitre, nous allons introduire le phénomène d'intrication. L'intrication est un phénomène qui apparaît dans un système composé de plusieurs sous-systèmes. Pour bien comprendre l'intrication, il faut savoir décrire mathématiquement les systèmes composés. C'est pourquoi nous allons commencer par introduire une nouvelle notion mathématique : le produit tensoriel.



11.1 Système composé, produit tensoriel

Produit tensoriel d'espaces vectoriels : Soit un système S composé de deux sous-systèmes totalement indépendants S_1 et S_2 (par exemple deux qubits). L'espace des états associé au système S_1 (resp. S_2) est $\mathcal{E}_1$ (resp. $\mathcal{E}_2$). Supposons que l'on connaisse [2] un ECOC $\{\widehat{A}, \widehat{B}\}$ (resp. $\{\widehat{C}, \widehat{D}\}$) dans $\mathcal{E}_1$ (resp. $\mathcal{E}_2$). Comment décrire mathématiquement l'ensemble S ? Dans la suite, nous allons répondre à cette question, sans chercher à introduire de manière rigoureuse les outils mathématiques.



Comme S_1 et S_2 sont totalement indépendants, on suppose que mesurer une observable d'un des deux système n'affecte pas l'autre. Les deux systèmes ne se voient pas [3], les observables et les états de $\mathcal{E}_1$ n'ont rien à voir avec celles et ceux de $\mathcal{E}_2$. Par conséquent, les observables $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ commutent avec les observables $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$. Il existe donc une base de vecteurs propres de $\mathcal{E}$ qui est commune à ces quatre observables. De plus, si l'on note (a_i, b_i) (resp. (c_j, d_j)) un couple de valeurs propres des observables $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ (resp. $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$), on sait que chaque ket propre de la base qui diagonalise les deux observables dans $\mathcal{E}_1$ (resp. $\mathcal{E}_2$) peut être défini de manière unique par la donnée d'un de ces couples de valeurs

1. Attention, l'état $|1\rangle$ est propre de la matrice de Pauli σ_z associée à la valeur propres -1, mais l'état $|0\rangle$ est propre de σ_z associé à la valeur propres 1. C'est une source de confusion courante. Ce qui est noté à l'intérieur du ket n'est pas une valeur propre. On étiquette les kets avec 0 ou 1 par analogie avec les bit classiques.

2. Il s'agit d'un cas particulier, que l'on a choisi pour partir d'un exemple simple. En général, les deux ECOC peuvent avoir un nombre d'observables différent.

3. Vouloir décrire ces deux systèmes ensemble, est donc *a priori* totalement artificiel.

propres. On note $\{|a_i, b_i\rangle\}$ (resp. $\{|c_j, d_j\rangle\}$) la base de l'ECOC $\{\widehat{A}, \widehat{B}\}$ (resp. $\{\widehat{C}, \widehat{D}\}$). Il existe donc une base de ket de $\mathcal{E}$ qui diagonalise les quatre observables, et cette base est unique : chacun de ses kets est défini de manière unique par la donnée du 4-uplet (a_i, b_i, c_j, d_j). L'espace $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel produit appelé espace produit tensoriel des espace $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. On note $\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2.}$ La dimension de cet espace vectoriel est donnée par le nombre de vecteurs de la base $\{|a_i, b_i, c_j, d_j\rangle\}$, c'est-à-dire par le nombre de possibilités de 4-uplets (a_i, b_i, c_j, d_j) distincts. Sachant qu'il y a $\dim \mathcal{E}_1$ (resp. $\dim \mathcal{E}_2$) couples (a_i, b_i) (resp. (c_j, d_j)) distincts, on a $\boxed{\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}_1 \dim \mathcal{E}_2}$ possibilités de 4-uplets (a_i, b_i, c_j, d_j).

Produit tensoriel entre états : Comment obtenir un ket de $\mathcal{E}$ à partir d'un ket $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_1$ et d'un ket $|\phi\rangle \in \mathcal{E}_2$? On va définir une opération appelée produit tensoriel entre états. Cette opération sera notée avec le même symbole que le produit tensoriel entre espaces. On notera donc $\boxed{|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle}$ le ket de $\mathcal{E}$, produit tensoriel des kets $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_1$ et $|\phi\rangle \in \mathcal{E}_2$. Pour bien comprendre de quoi il s'agit, supposons que $|\psi\rangle \equiv |a_i, b_i\rangle$ et $|\phi\rangle \equiv |c_j, d_j\rangle$, c'est-à-dire que $|\psi\rangle$ et $|\phi\rangle$ sont des kets de base. $|\psi\rangle$ est un état propre de $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$, $|\phi\rangle$ est un état propre de $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$. Ainsi, dans l'espace $\mathcal{E}$, $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ est un état propre des quatre observables $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$. En fait il s'agit simplement de l'état $|a_i, b_i, c_j, d_j\rangle$, que l'on va noter $|a_i, b_i\rangle \otimes |c_j, d_j\rangle$. Notez que le produit tensoriel n'est pas commutatif. C'est l'ordre que l'on choisit pour écrire le produit tensoriel entre espaces qui détermine l'ordre dans lequel doivent apparaître les kets dont on prend le produit tensoriel : ici on doit d'abord avoir un ket de $\mathcal{E}_1$, puis un ket de $\mathcal{E}_2$.

Pour simplifier les notations, notons $\{|u_n\rangle\}_{n\in\{1,2,\dots,\dim \mathcal{E}_1\}}$ et $\{|v_m\rangle\}_{m\in\{1,2,\dots,\dim \mathcal{E}_2\}}$ les bases de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ introduites dans le paragraphe précédent. Notez bien que u_n et v_m ne sont pas des valeurs propres d'observables, mais simplement des étiquettes associées aux vecteurs de chacune des deux bases. De manière générale, un ket $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_1$ (resp. un ket $|\phi\rangle \in \mathcal{E}_2$) peut se décomposer sur la base $\{|u_n\rangle\}$ (resp. $\{|v_m\rangle\}$) :

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\dim \mathcal{E}_1} \psi_n |u_n\rangle \qquad |\phi\rangle = \sum_{m=1}^{\dim \mathcal{E}_2} \phi_m |v_m\rangle \tag{11.1}$$

Comme les deux espaces dont on prend le produit tensoriel (et donc les états qui les composent) n'ont rien à voir entre eux, les propriétés suivantes doivent être vérifiées [4] :

$\forall |\psi\rangle, |\psi'\rangle \in \mathcal{E}_1, \quad \forall |\phi\rangle, |\phi'\rangle \in \mathcal{E}_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$

1. $\boxed{\big(|\psi\rangle + |\psi'\rangle\big) \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle + |\psi'\rangle \otimes |\phi\rangle}$
2. $\boxed{|\psi\rangle \otimes \big(|\phi\rangle + |\phi'\rangle\big) = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle + |\psi\rangle \otimes |\phi'\rangle}$
3. $\boxed{(\lambda |\psi\rangle) \otimes |\phi\rangle = \lambda (|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)}$
4. $\boxed{|\psi\rangle \otimes (\lambda |\phi\rangle) = \lambda (|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)}$

Par ailleurs, comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, on forme une base de $\mathcal{E}$ en prenant tous les produits tensoriels possibles des kets des bases de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Une base de $\mathcal{E}$ est donc $\{|u_n\rangle \otimes |v_m\rangle\}$, et on peut décomposer un ket $|\theta\rangle$ de $\mathcal{E}$ sur cette base :

4. Il faut retenir ces propriétés qui sont très utilisées en pratique.

$$|\theta\rangle = \sum_{n=1}^{\dim \mathcal{E}_1} \sum_{m=1}^{\dim \mathcal{E}_2} \theta_{n,m} |u_n\rangle \otimes |v_m\rangle \,, \qquad \text{où les } \theta_{n,m} \text{ sont des nombres complexes.}$$

La décomposition fait apparaitre deux sommes, l'une sur les kets de la base de $\mathcal{E}_1$, l'autre sur les kets de la base de $\mathcal{E}_2$. Au total, on a bien $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}_1 \dim \mathcal{E}_2$ termes dans cette décomposition. En utilisant les décompositions 11.1, essayons maintenant d'écrire le produit tensoriel de $|\psi\rangle$ et $|\phi\rangle$ sous cette forme :

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \left(\sum_n \psi_n |u_n\rangle\right) \otimes \left(\sum_m \phi_m |v_m\rangle\right)$$

En utilisant les propriétés 1, 2, 3 et 4, on obtient

$$\boxed{|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \sum_n \sum_m \psi_n \phi_m |u_n\rangle \otimes |v_m\rangle} \tag{11.2}$$

On remarque que $\theta_{n,m}$ s'identifie avec $\psi_n \phi_m$. On a donc trouvé une recette pour déterminer les coefficients de décomposition d'un ket $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ sur la base $\{|u_n\rangle \otimes |v_m\rangle\}$: ce sont les produits $\psi_n \phi_m$.

Montrons enfin comment obtenir bra associé à un ket de $\mathcal{E}$, et comment calculer le produit scalaire hermitien de deux kets $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ de $\mathcal{E}$.

$\forall \, |\theta\rangle \,, |\theta'\rangle \in \mathcal{E}$

5. $\boxed{|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \to \langle\psi| \otimes \langle\phi|}$

6. $\boxed{\langle\theta|\theta'\rangle = \left(\langle\psi| \otimes \langle\phi|\right)\left(|\psi'\rangle \otimes |\phi'\rangle\right) = \langle\psi|\psi'\rangle \langle\phi|\phi'\rangle}$

Ainsi, le produit scalaire hermitien d'un état produit tensoriel est le produit des produits scalaires hermitiens dans chaque espace. Les kets et les bras appartenant à des espaces différents ne se voient pas.

Produit tensoriel entre opérateurs : Dans ce paragraphe nous allons voir comment obtenir un opérateur agissant dans $\mathcal{E}$ à partir d'un opérateur $\widehat{A}$ agissant dans $\mathcal{E}_1$ et d'un opérateur $\widehat{B}$ agissant dans $\mathcal{E}_2$. Attention, ici ces opérateurs n'ont rien à voir avec les opérateurs $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ introduits dans la première partie. Si l'on note les matrices de ces deux observables dans les bases introduites précédemment

$$\left(\widehat{A}\right)_{\{|u_n\rangle\}} \equiv (\alpha_{ij}) \qquad \text{et} \qquad \left(\widehat{B}\right)_{\{|v_m\rangle\}} \equiv (\beta_{ij}) \,,$$

lorsqu'on applique les matrices à des vecteurs de base, on obtient

$$\widehat{A}\, |u_n\rangle = \sum_{n'} \alpha_{n'n} |u_{n'}\rangle \qquad \text{et} \qquad \widehat{B}\, |v_m\rangle = \sum_{m'} \beta_{m'n} |v_{m'}\rangle \,.$$

Si $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ agissent sur un ket $|u_n\rangle \otimes |v_m\rangle$ de $\mathcal{E}$, en utilisant le fait que $\widehat{A}$ n'agit que sur les kets de $\mathcal{E}_1$ et $\widehat{B}$ n'agit que sur les kets de $\mathcal{E}_2$, on a

$$\widehat{A}\, |u_n\rangle \otimes |v_m\rangle = \left(\widehat{A}\, |u_n\rangle\right) \otimes |v_m\rangle = \left(\sum_{n'} \alpha_{n'n} |u_{n'}\rangle\right) \otimes |v_m\rangle$$

$$\widehat{B}\, |v_n\rangle \otimes |v_m\rangle = |u_n\rangle \otimes \left(\widehat{B}\, |v_m\rangle\right) = |u_n\rangle \otimes \left(\sum_{m'} \beta_{m'm} |v_{m'}\rangle\right)$$

L'action de $\widehat{B}$ puis $\widehat{A}$ sur le ket $|u_n\rangle \otimes |v_m\rangle$ s'écrit donc

$$\left(\sum_{n'} \alpha_{n'n} |u_{n'}\rangle\right) \otimes \left(\sum_{m'} \beta_{m'm} |v_{m'}\rangle\right) = \sum_{n'} \sum_{m'} \alpha_{n'n}\beta_{m'm} |u_{n'}\rangle \otimes |v_{m'}\rangle \tag{11.3}$$

Cette opération s'appelle produit tensoriel entre les opérateurs $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$. On note $\boxed{\widehat{A} \otimes \widehat{B}.}$ On a donc

$$\boxed{\widehat{A} \otimes \widehat{B} |u_n\rangle \otimes |v_m\rangle = \sum_{n'}^{\dim \mathcal{E}_1} \sum_{m'}^{\dim \mathcal{E}_2} \alpha_{n'n}\beta_{m'm} |u_{n'}\rangle \otimes |v_{m'}\rangle} \tag{11.4}$$

Cette formule donne une recette de calcul de la matrice de $\widehat{A} \otimes \widehat{B}$ dans la base $|u_n\rangle \otimes |v_m\rangle$. Si on la récrit sous la forme

$$\widehat{A} \otimes \widehat{B} |u_n\rangle \otimes |v_m\rangle = \sum_{n'} \alpha_{n'n} \left(\sum_{m'} \beta_{m'm} |u_{n'}\rangle \otimes |v_{m'}\rangle\right),$$

on voit apparaître une matrice par blocs. Chaque bloc étant la matrice $\left(\widehat{B}\right)$ multipliée par le coefficient $\alpha_{n'n}$. Prenons un exemple simple avec deux espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ de dimension 2 (par exemple les espaces associés à deux qubits). L'espace $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ est de dimension 4. Les opérateurs agissant dans cet espace sont des matrices 4×4, les matrices des opérateurs $\left(\widehat{A}\right)$ et $\left(\widehat{B}\right)$ étant des matrices $2 \times\ 2$:

$$(A)_{\{|u_1\rangle,|u_2\rangle\}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (B)_{\{|v_1\rangle,|v_2\rangle\}} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}.$$

La matrice de l'opérateur $\widehat{A} \otimes \widehat{B}$ dans la base $\{|u_1\rangle \otimes |v_1\rangle, |u_1\rangle \otimes |v_2\rangle, |u_2\rangle \otimes |v_1\rangle, |u_2\rangle \otimes |v_2\rangle\}$ est

$$\left(\widehat{A} \otimes \widehat{B}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}B & \alpha_{12}B \\ \alpha_{21}B & \alpha_{22}B \end{pmatrix}.$$

Remarques diverses :

— Attention, la notation « $\otimes$ » a trois significations différentes suivant le contexte : produit tensoriel d'espaces, produit tensoriel d'états, produit tensoriel d'opérateurs.

— C'est l'écriture du produit tensoriel d'espaces qui fixe l'ordre dans lequel on doit écrire les produits tensoriels d'états et d'opérateurs : si l'on écrit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, alors dans le produit tensoriel $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$, $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_1$ et $|\phi\rangle \in \mathcal{E}_2$. De plus, dans le produit $\widehat{A} \otimes \widehat{B}$, $\widehat{A}$ est un opérateur agissant dans $\mathcal{E}_1$ et $\widehat{B}$ est un opérateur agissant dans $\mathcal{E}_2$.

— Une conséquence du point précédent est qu'on omet souvent le symbole « $\otimes$ » dans le cas des produits tensoriels d'états et d'opérateurs. On écrira fréquemment $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \equiv |\psi\rangle |\phi\rangle$, $\widehat{A} \otimes \widehat{B} = \widehat{A}\widehat{B}$.

— Revenons sur cette affirmation qui vous a peut être troublé dans la première partie de ce chapitre : *les observables de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ commutent entre elles.* Ce doit être le cas puisque les systèmes décrit par ces deux espaces vectoriels n'ont rien à voir entre eux. Nous pouvons maintenant mieux le comprendre. Calculons le commutateur entre une observable $\widehat{A}$ de $\mathcal{E}_1$ et une observable $\widehat{B}$ de $\mathcal{E}_2$:

$$\left[\widehat{A}, \widehat{B}\right] = \left[\widehat{A} \otimes \hat{\mathbb{1}}_2, \hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \widehat{B}\right] = \left(\widehat{A} \otimes \hat{\mathbb{1}}_2\right)\left(\hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \widehat{B}\right) - \left(\hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \widehat{B}\right)\left(\widehat{A} \otimes \hat{\mathbb{1}}_2\right) = \widehat{A} \otimes \widehat{B} - \widehat{A} \otimes \widehat{B} = 0$$

11.2 Exemples de systèmes composés

Deux particules de spin 1/2, ou 2 qubits : Dans ce cas, $\mathcal{E}_1$ (resp. $\mathcal{E}_2$) est un espace de dimension 2 ayant pour base [5] $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\}$ (resp. $\{|0\rangle_2, |1\rangle_2\}$). L'espace produit tensoriel $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ est de dimension 4 et on en construit une base $\mathcal{B}$ en prenant tous les produits tensoriels possibles entre les kets des bases de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$:

$$\mathcal{B} = \{|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |1\rangle \otimes |1\rangle_2\}$$

Pour simplifier les notations, on omet le symbole « $\otimes$ », et on peut également s'affranchir des indices 1 et 2 puisqu'on sait que l'état apparaissant à gauche (resp. à droite) est dans $\mathcal{E}_1$ (resp. dans $\mathcal{E}_2$). On notera donc souvent

$$\mathcal{B} = \{|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle\}, \text{ voire même}$$

$$\boxed{\mathcal{B} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}.} \tag{11.5}$$

Cette notation est très utilisée, et il faut vous assurer de bien la comprendre. Il est vrai que suivant le contexte on note des choses différentes à l'intérieur du ket, et que cela peut mener à des confusions. Dans le contexte des ECOC, on étiquette les kets avec des valeurs propres, ici la première valeur apparaissant dans le ket est l'état du premier qubit, la seconde valeur est l'état du second qubit. **Attention le ket $|0\rangle$ est propre de la matrice de Pauli $\hat{\sigma}_z$ associé à la valeur propre 1, et le ket $|1\rangle$ est propre de la matrice de Pauli $\hat{\sigma}_z$ associé à la valeur propre -1.**

Tout état de $\mathcal{E}$ peut se décomposer sur cette base :

$$|\psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle,$$

où c_{00}, c_{01}, c_{10}, et c_{11} sont les coefficients (complexes) de la décomposition.

Une particule avec plusieurs degrés de liberté : Le produit tensoriel sert également à décrire simultanément plusieurs degrés de liberté d'une même particule [6]. Dans le cours sur le spin 1/2, nous nous sommes restreints à un espace de dimension 2 correspondant au degré de liberté (interne) de spin. Comment ajouter à cette description le degré de liberté (externe) de position ? Si l'on nomme $\mathcal{E}_\mathrm{s}$ l'espace de Hilbert de dimension 2 contenant les états du spin 1/2 de la particule, et $\mathcal{E}_\mathrm{x}$, $\mathcal{E}_\mathrm{y}$, $\mathcal{E}_\mathrm{z}$, les espaces de Hilbert de dimensions infinies contenant les états de position suivant les trois axes cartésiens. Pour décrire tous ces degrés de liberté ensemble, il faut introduire l'espace produit tensoriel $\mathcal{E}_\mathrm{x} \otimes \mathcal{E}_\mathrm{y} \otimes \mathcal{E}_\mathrm{z} \otimes \mathcal{E}_\mathrm{s}$. L'état du système s'écrit alors $|\Psi\rangle\,|s\rangle$, où $|\Psi\rangle$ est l'état associé aux degrés de liberté de position : $|\Psi\rangle \equiv |\phi\rangle_x |\phi\rangle_y |\phi\rangle_z$. Nous avons déjà vu que la fonction d'onde s'obtient en projetant l'état du système sur les kets propre $|x\rangle$, $|y\rangle$ et $|z\rangle$ des opérateurs positions $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$, et $\widehat{Z}$ (par exemple $\langle x|\phi_x\rangle \equiv \phi_x(x)$. Ici il faut également projeter sur les états propres de l'opérateur $\widehat{S}_z$. Pour décrire une particule de spin 1/2 (spin + degré de liberté de position), il faut donc deux fonctions d'onde :

$$\Phi_+(x,y,z) = \phi_x(x)\phi_y(y)\phi_z(z)\,{}_z\langle+|s\rangle$$
$$\Phi_-(x,y,z) = \phi_x(x)\phi_y(y)\phi_z(z)\,{}_z\langle-|s\rangle\,.$$

Ici les coefficients $\langle\pm|s\rangle$ sont simplement des nombres, et les deux composantes de la fonction d'onde correspondent aux deux projections du spin 1/2. Notez également que le produit tensoriel entre états se traduit par un simple produit entre fonctions d'ondes.

5. Ici l'indice 1 ou 2 indique l'appartenance du ket à $\mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$.
6. Ce paragraphe n'est pas exigible, mais il est intéressant de le lire quand même.

11.3 Intrication

Si l'on considère trois espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, tels que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, il existe des états de $\mathcal{E}$ qui ne peuvent pas s'écrire comme le produit tensoriel d'un état de $\mathcal{E}_1$ avec un état de $\mathcal{E}_2$. Ces états sont appelé *états intriqués.*

Définition d'un état factorisable ou séparable : On appelle état séparable, ou factorisable un état de $\mathcal{E}$ qui peut se mettre sous la forme $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$, où $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_1$ et $|\phi\rangle \in \mathcal{E}_2$.

Exemples d'états intriqués à deux qubits : Un état intriqué est donc un état non-factorisable. Prenons un exemple simple : deux qubits. Nous avons vu dans la partie précédente que l'état d'un système à deux qubits peut se décomposer sur la base $\mathcal{B} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ de la manière suivante : $|\psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$. Prenons par exemple l'état $|00\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$, il s'agit d'un état factorisable (car factorisé). De même pour les 4 états de la base $\mathcal{B}$. Par contre les états

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right), \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right)$$

sont intriqués. Il faut bien avoir en tête que les deux qubits sont des systèmes physiques différents qui peuvent être distants (par exemple deux particules de spin 1/2, dont l'une est sur la lune et l'autre sur terre). Néanmoins, on ne peut pas factoriser leur état, l'état quantique de l'un est lié (on pourrait dire emmêlé, enchevêtré) à l'état quantique de l'autre. Cela a des conséquence très importantes en pratique. Notez que ces états ne sont pas des curiosités de la théorie. Ils existent dans la nature, et l'on sait les préparer et les manipuler en laboratoire.

Mesure d'une paire intriquée : On voit un effet de l'intrication lorsque l'on mesure l'état des deux qubits. Supposons qu'une paire de qubits soit dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$. Si l'on mesure le premier qubit[7] dans la base $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\}$, on peut obtenir les valeurs propres 1 et -1 avec la probabilité 1/2. L'état du système à l'issue de la mesure s'obtient en projetant l'état du premier qubit sur $|0\rangle_1$ ou $|1\rangle_1$ dans $\mathcal{E}_1$, suivant la valeur propre obtenue. Supposons que l'on ait obtenu la valeur propre -1. À l'issue de la mesure l'état (non normé) du système[8] est

$$\left(|1\rangle\langle 1| \otimes \hat{\mathbb{1}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle\langle 1|0\rangle \otimes \hat{\mathbb{1}}\,|0\rangle + |1\rangle\langle 1|1\rangle \otimes \hat{\mathbb{1}}\,|1\rangle\right) \propto |11\rangle$$

Le système des 2 qubits à l'issue de cette mesure est donc dans l'état $|11\rangle \equiv |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2$. Notez qu'il s'agit d'un état factorisé. On voit donc que la mesure projective peut détruire l'intrication. Supposons maintenant que l'on effectue une mesure du second qubit dans la base $\{|0\rangle_2, |1\rangle_2\}$, on va trouver la valeur propre -1 à coup sûr puisque le second qubit est dans l'état $|1\rangle_2$. Pourtant si l'on avait mesuré le second qubit avant le premier, on aurait obtenu les valeurs propres 1 et -1 avec la probabilité 1/2. Si l'on trouve -1 en mesurant le premier qubit, alors on trouve -1 pour le second, et inversement. Convainquez-vous également que si l'on mesure 1 lors de la première mesure, on mesurera également 1 lors de la seconde. On constate donc que les résultats des deux mesures, quel que soit l'ordre dans lequel elles sont effectuées, sont parfaitement corrélés : tout se passe comme si l'état du qubit 2 était instantanément modifié lors de la mesure du qubit 1.

7. En langage du spin 1/2, on mesure donc l'observable $\widehat{S}_z$.
8. Souvenez-vous que les processus de mesure sont indépendants. Dans $\mathcal{E}_2$, on applique donc l'identité.

Intrication et changement de base : Que se passe-t-il si l'on mesure dans une autre base ? Par exemple la base [9]

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$$
$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right).$$

Pour répondre à cette question, il faut exprimer l'état des deux qubits dans cette base. On a [10]

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1 + |-\rangle_1\right)\otimes\left(|+\rangle_2 + |-\rangle_2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1 - |-\rangle_1\right)\otimes\left(|+\rangle_2 - |-\rangle_2\right)\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|{+}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle + \cancel{|{+}{-}\rangle} + \cancel{|{-}{+}\rangle} + |{+}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle - \cancel{|{+}{-}\rangle} - \cancel{|{-}{+}\rangle}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle\right).\end{aligned}$$

L'état après changement de base a exactement la même forme, il est également intriqué. Si l'on effectue une mesure de chaque qubit dans cette base on va donc trouver le même résultat : les mesures sont parfaitement corrélées. De plus, on peut montrer que ce résultat est vrai dans n'importe quelle autre base. Quelle que soit la base, on trouve le même état intriqué. L'intrication n'est donc pas une propriété qui dépend de la base. Cela a semblé très surprenant à certains physiciens du début du 20 ème siècle. En effet, il semble étrange que la mesure du qubit 1 dans n'importe quelle base impose l'état du qubit 2, d'autant que ces mesures ne commutent pas entre elles (les composantes du spin ne commutent pas entre elles). Einstein, Poldolsky et Rosen pensaient donc que l'état final du système doit préexister. C'est à dire que la théorie telle que nous l'avons présentée est incomplète. Pour eux, cette superposition d'états que nous avons appelé « état intriqué » n'a pas de réalité. Donc ils ont suggéré d'ajouter une étiquette à l'état du système, une « variable cachée », qui contient l'information sur le résultat des mesures. En d'autre termes, le fait de trouver 1 et 1 ou -1 et -1 est définit dès le départ au moment de la création de la paire, et inscrit dans cette variable cachée. Tous les physiciens ne pensaient pas qu'il était nécessaire d'ajouter une variable cachée, notamment Niels Bohr, et ce sujet a donné lieu à de nombreux débats. En 1964, John Bell formule une inégalité qui doit être vérifiée dans une théorie à variable cachée. Cette inégalité porte sur des grandeurs mesurables dans des expériences. S'en est suivi une course expérimentale pour tester cette inégalité. En 1982, Alain Aspect réalise une expérience qui permet de le faire, et donne une réponse définitive : les inégalités de Bell sont violées, donc il n'y a pas de variable cachée dans la théorie quantique. Il faut accepter que les états intriqués sont bien une réalité. Il a obtenu, avec Anton Zeilinger et John Clauser, le prix Nobel de physique en 2022 pour ces travaux sur l'intrication.

9. En langage de spin 1/2, il s'agit de la base des états propres de $\widehat{S}_x$, qui est obtenue par application de la matrice Hadamard.

10. Ici, on note $|\pm\rangle_1 \otimes |\pm\rangle_2 \equiv |{\pm}{\pm}\rangle$.